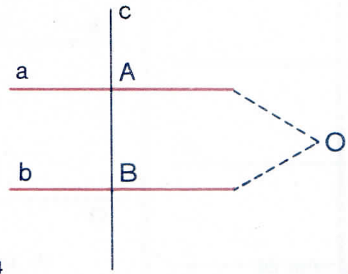


fig. 84

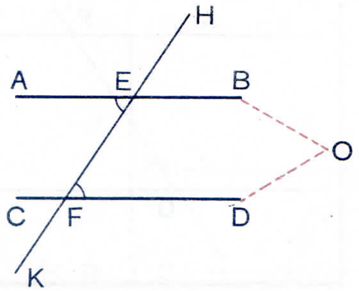


fig. 85

Due segmenti o due semirette si dicono paralleli quando lo sono le rette alle quali tali elementi appartengono.

L'esistenza di rette parallele risulta dal seguente

TEOREMA Due rette di un piano perpendicolari ad una stessa retta non hanno alcun punto in comune, cioè sono parallele.

Siano (fig. 84) a, b due rette perpendicolari alla stessa retta c nei punti A e B rispettivamente (ipotesi): vogliamo dimostrare che tali rette non possono incontrarsi in un punto O (tesi). Infatti, se ciò avvenisse, per il punto O passerebbero due rette distinte perpendicolari a una terza, il che è impossibile (n. 65).

72 Per poter giudicare del parallelismo di due rette sono fondamentali i seguenti criteri, compendiati nel seguente

TEOREMA Se due rette di un piano formano con una trasversale
1) due angoli alterni interni (o esterni) congruenti, oppure
2) due angoli corrispondenti congruenti, oppure
3) due angoli coniugati supplementari,

le due rette sono parallele.

1) Siano AB, CD due rette complanari, le quali formino con la trasversale HK gli angoli alterni interni $\widehat{AEF}$, $\widehat{EFD}$, congruenti fra loro (fig. 85) (ipotesi): diciamo che le rette AB, CD non possono avere alcun punto in comune (tesi). Infatti, se le semirette EB, FD si incontrassero in un punto O, si otterrebbe un triangolo OEF, nel quale l'angolo esterno $\widehat{AEF}$ risulterebbe congruente all'angolo interno $\widehat{EFD}$ non adiacente e ciò è contrario al teorema dell'angolo esterno di un triangolo (n. 60).

In modo analogo si dimostra che non possono incontrarsi le due semirette EA e FC. Ne segue che le due rette AB, CD sono parallele.

Se sono congruenti gli angoli alterni esterni $\widehat{HEB}$, $\widehat{CFK}$, allora sono congruenti i loro opposti al vertice $\widehat{AEF}$, $\widehat{EFD}$ e poichè questi sono alterni interni si ricade nel caso già contemplato.

2) Se poi sono congruenti due angoli corrispondenti come $\widehat{HEB}$, $\widehat{EFD}$, al-

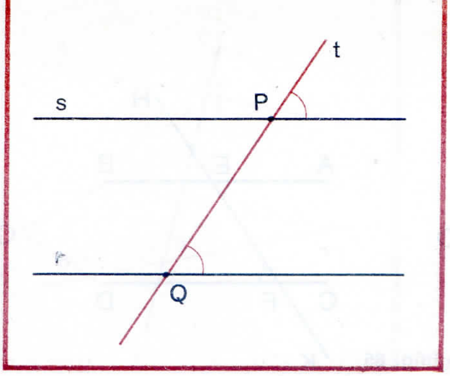


fig. 86

lora, avendosi $\widehat{AEF} \cong \widehat{HEB}$ (perchè opposti al vertice), risulta $\widehat{AEF} \cong \widehat{EFD}$ e si ritorna nella dimostrazione precedente.

3) Se, infine, fossero supplementari due angoli coniugati, come $\widehat{BEF}$, $\widehat{EFD}$, allora, notando che sono pure supplementari gli angoli $\widehat{AEF}$ e $\widehat{BEF}$ (perchè adiacenti), si ha $\widehat{AEF} \cong \widehat{EFD}$ (perchè supplementari del medesimo angolo) e si ricade ancora una volta nel caso già considerato.

OSSERVAZIONE Si presti attenzione in modo particolare alla dimostrazione della prima parte del teorema precedente. Essa è stata conseguita con questo procedimento: si è provato a negare la tesi e si è fatto vedere che con ciò si giunge a un risultato *assurdo*, cioè in contrasto con una proposizione stabilita in precedenza. Da ciò segue la falsità della premessa (la negazione della tesi). Ma se è falso negare la tesi, ciò equivale a dichiararla vera. Notiamo che deve verificarsi uno dei casi: o è vera la tesi o è vero il contrario della tesi.

Il procedimento dimostrativo mediante il quale la verità di un teorema si consegue negandone la tesi e facendo vedere che ciò porta a un risultato in contrasto con l'ipotesi o con qualche proposizione stabilita precedentemente, si chiama **dimostrazione per assurdo.**

73 Ora dimostriamo il seguente importante:

TEOREMA Per ogni punto, situato fuori di una retta data, passa una retta parallela a questa.

Per il punto P (fig. 86) si immagini condotta una trasversale t, che tagli la retta r in un punto Q, e una seconda retta s che formi rispetto ad r — con la trasversale già tracciata — angoli corrispondenti congruenti: la retta s è parallela ad r, per il secondo criterio di parallelismo.

L'unicità della parallela non si può dimostrare, cosicchè siamo costretti ad ammetterla come postulato. Esso costituisce il seguente fondamentale *postulato di Euclide* o *postulato delle parallele* (vedi Digressione sul Quinto Postulato di Euclide):

Per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela alla retta data.

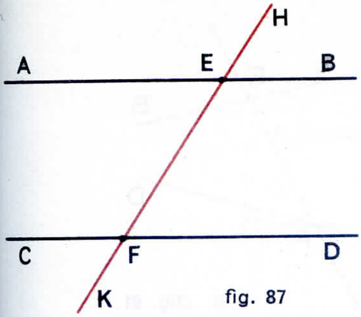


fig. 87

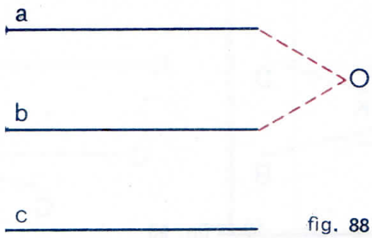
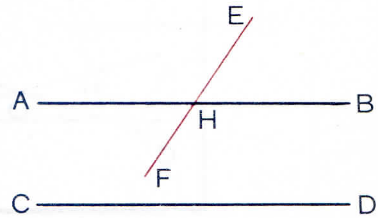


fig. 88

fig. 89



74 Da esso si deducono i seguenti corollari:

COROLLARIO 1 (reciproco del Teorema n. 72) **Se due rette sono parallele, esse formano con una trasversale angoli alterni interni (o esterni) congruenti, angoli corrispondenti congruenti e angoli coniugati supplementari.**

Le due rette AB, CD siano parallele (fig. 87) e una trasversale HK le incontri nei punti E e F (ipotesi); diciamo che gli angoli alterni interni $\widehat{BEF}$, $\widehat{CFE}$ sono congruenti (tesi).

Se dal punto E si conduce una retta che formi con la HK un angolo $\widehat{BEF}$ congruente a $\widehat{CFE}$, questa retta risulta parallela a CD (Teor. 72). Dunque essa coincide con AB per il postulato di Euclide; perciò $\widehat{BEF} \cong \widehat{CFE}$.

Dalla congruenza degli angoli alterni interni risultano anche facilmente le altre proprietà enunciate nella tesi del corollario.

COROLLARIO 2 **Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.**

In simboli:

$$a \parallel c \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$$

Infatti (fig. 88), se le due rette a e b s'incontrassero, dal loro punto d'intersezione passerebbero due rette parallele alla retta c e ciò in contrasto con il postulato di Euclide.

COROLLARIO 3 **Se due rette sono parallele, ogni retta del loro piano che ne incontra una incontra anche l'altra.**

Infatti, siano AB e CD le due parallele e la retta EF tagli la prima in H (fig. 89): allora la stessa retta EF deve incontrare anche la CD, perchè altrimenti per il punto H passerebbero due rette parallele alla CD, contro il postulato di Euclide.

COROLLARIO 4 **Se due rette sono parallele, ogni perpendicolare all'una è anche perpendicolare all'altra.**

Infatti, se due rette sono parallele, ogni perpendicolare alla prima deve incon-

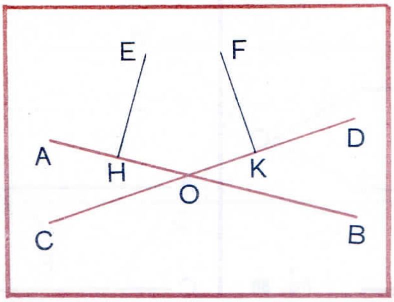


fig. 90

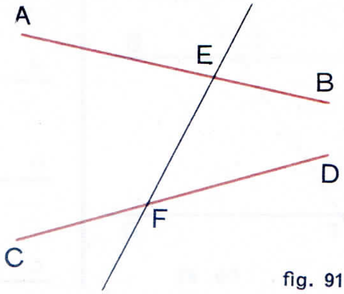


fig. 91

trare anche la seconda (Cor. 3) e formare con ambedue angoli alterni congruenti; poichè uno di essi è retto, sarà retto anche l'altro.

COROLLARIO 5 Se due rette sono rispettivamente perpendicolari a due rette che si intersecano, si tagliano esse pure in un punto.

Le due rette AB, CD si intersechino nel punto O (fig. 90) e le due rette EH, FH siano rispettivamente perpendicolari ad esse (ipotesi); diciamo che queste due rette si devono incontrare (tesi).

Infatti, se fossero parallele, la retta CD, che è perpendicolare alla FK, sarebbe pure perpendicolare alla parallela EH (Cor. 4) e allora per il punto O passerebbero due rette perpendicolari alla retta EH, il che è assurdo (n. 65).

COROLLARIO 6 Se due rette di un piano formano con una trasversale angoli coniugati non supplementari, si incontrano, e il punto d'intersezione cade da quella parte della trasversale dove la somma degli angoli coniugati è minore di un angolo piatto.

Siano AB, CD due rette complanari che formino con la trasversale EF angoli coniugati non supplementari e più precisamente, con riferimento alla fig. 91, supponiamo che la somma degli angoli $\widehat{BEF}$ e $\widehat{DFE}$ sia minore di un angolo piatto (ipotesi); diciamo che le due rette AB, CD s'incontrano dalla parte di B e D (tesi).

Infatti, le due rette AB, CD, essendo complanari, o s'incontrano o sono parallele; ma parallele non possono essere, perchè gli angoli coniugati relativi alla trasversale EF per ipotesi non sono supplementari: quindi s'intersecano. Ora, siccome la somma degli angoli $\widehat{BEF}$, $\widehat{DFE}$ è minore di un angolo piatto, la somma dei rispettivi angoli supplementari $\widehat{AEF}$, $\widehat{CFE}$ sarà maggiore di un angolo piatto, cosicchè le due rette AB, CD non possono incontrarsi dalla parte di A e C, poichè, in tal caso, si otterrebbe un triangolo in cui la somma di due angoli supera un angolo piatto, contro quanto abbiamo già stabilito al n. 61.

75 DEFINIZIONE Due semirette parallele si dicono **concordi** quando giacciono da una stessa banda rispetto alla retta congiungente le loro origini (fig.

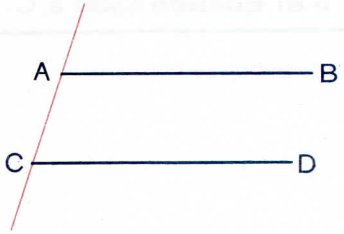


fig. 92

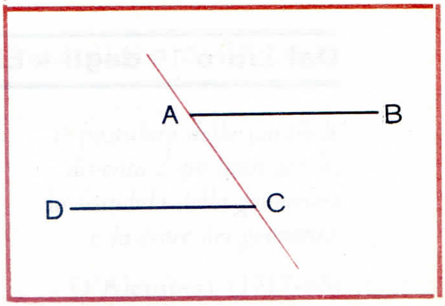


fig. 93

92); si dicono invece **discordi** quando giacciono da bande opposte rispetto a tale retta (fig. 93).

Per le proprietà precedenti (Cor. 2, Cor, 4) e per la proprietà transitiva della congruenza, è facile dimostrare il seguente

TEOREMA Due angoli aventi i lati paralleli e concordi o paralleli e discordi sono congruenti; due angoli aventi due lati paralleli e concordi e due lati paralleli e discordi sono supplementari. (figg. 94, 95, 96).

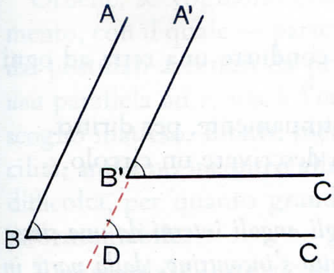


fig. 94

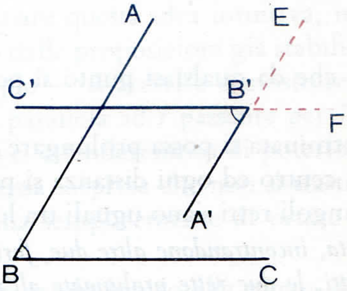


fig. 95

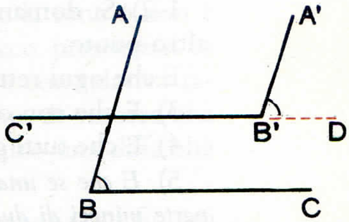


fig. 96