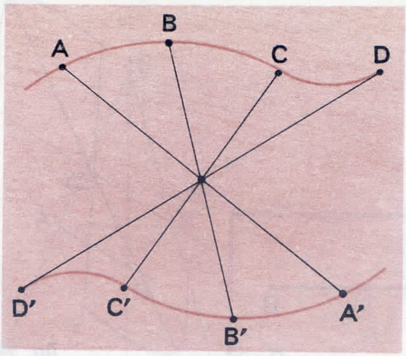

fig. 76

59 TEOREMA Due figure piane simmetriche rispetto ad un punto sono congruenti.

Siano A, B, C, D... i punti di una figura piana F e siano A', B', C', D'... i punti dell'altra figura F', ordinatamente simmetrici dei primi rispetto al punto O. La rotazione del piano attorno ad O, che sovrappone il segmento OA al segmento congruente OA', sovrappone anche l'angolo $\widehat{AOB}$ all'angolo congruente $\widehat{A'OB'}$ (i due angoli sono opposti al vertice) e quindi il segmento OB al suo congruente OB'. Analogamente, la rotazione sovrappone i punti C, D... ai loro simmetrici C', D'...; quindi tutti i punti di F ai punti di F' (fig. 76).

OSSERVAZIONE Notiamo in particolare, dopo il teorema ora visto, che la figura simmetrica di un segmento AB rispetto ad un punto O è un segmento $A'B'$ congruente a quello.

Teorema dell'angolo esterno di un triangolo e classificazione dei triangoli

60 TEOREMA In un triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.

Sia il triangolo ABC e si consideri l'angolo esterno $\widehat{CBD}$. Dimostriamo che esso è maggiore di ciascuno degli angoli interni $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAB}$, non adiacenti.

Consideriamo il punto F, simmetrico di A rispetto al centro O del segmento BC. I due triangoli ACO, FBO sono congruenti, perchè simmetrici rispetto ad O e quindi $\widehat{OBF} \cong \widehat{OCA}$ perchè si corrispondono nella congruenza, ora stabilita, fra i due triangoli. E siccome $\widehat{CBD} > \widehat{CBF}$, risulta anche $\widehat{CBD} > \widehat{ACB}$.

In modo analogo, prolungando il lato BC dalla parte di B, si dimostra che l'angolo $\widehat{ABH}$ ($\cong \widehat{DBC}$) è maggiore di $\widehat{CAB}$.

OSSERVAZIONE Per il rigore della dimostrazione bisogna rilevare che la semiretta BF è interna all'angolo $\widehat{CBD}$.

Infatti, rispetto alla *retta* BC, le semirette BA e BD giacciono da parte opposta.

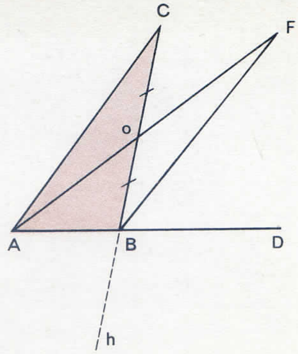

fig. 77

Allora F, che giace dalla parte opposta di A rispetto alla retta BC, giace dalla parte della semiretta BD, rispetto alla retta BC.

La semiretta AF, quindi il punto F, giace, rispetto alla retta AD, dalla parte della semiretta BC.

Segue (n. 18) che F è interno all'angolo CBD e quindi che BF è una semiretta interna al medesimo angolo.

61 COROLLARIO 1 In un triangolo la somma di due angoli interni è minore di un angolo piatto.

Infatti (fig. 77), come abbiamo già stabilito,

$$\widehat{ACB} < \widehat{CBD}.$$

Aggiungendo ad ambedue i membri di questa diseguaglianza lo stesso angolo $\widehat{CBA}$, si avrà:

$$\widehat{ACB} + \widehat{CBA} < \widehat{CBD} + \widehat{CBA}.$$

Ma gli angoli $\widehat{CBD}$, $\widehat{CBA}$ sono adiacenti; perciò la loro somma vale un angolo piatto e resta così provato che la somma dei due angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$ è minore di un angolo piatto.

COROLLARIO 2 Un triangolo non può avere più di un angolo retto od ottuso.

Infatti, se ve ne fossero due, la loro somma sarebbe uguale o maggiore di un angolo piatto e ciò non può essere per il corollario precedente.

COROLLARIO 3 Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.

Infatti, siccome sono congruenti, non possono essere nè retti nè ottusi, in conformità al corollario precedente.

Dal corollario 2 risulta che i triangoli si possono classificare nel modo seguente:

1) Triangoli con tre angoli acuti (triangoli acutangoli).
2) Triangoli con un angolo ottuso (triangoli ottusangoli).
3) Triangoli con un angolo retto (triangoli rettangoli).

Esistono triangoli delle tre specie: ad esempio, è acutangolo un triangolo isoscele con l'angolo al vertice acuto (perchè sono acuti anche gli angoli alla base); triangoli della seconda e terza specie si *costruiscono* in modo immediato, appena si sappia costruire un angolo retto e quindi un angolo ottuso.

In un triangolo rettangolo i lati adiacenti all'angolo retto si dicono **cateti**; il lato opposto all'angolo retto si chiama **ipotenusa**.

62 OSSERVAZIONE. Quando parliamo, come nel paragrafo precedente, di « costruire » una figura, vogliamo dire con questo che sappiamo che essa *esiste*.

L'esistenza della figura dipende soltanto dai postulati ammessi e dai teoremi dimostrati precedentemente e rimane assente ogni considerazione sulla possibilità di una *costruzione* o *determinazione* effettiva della figura mediante riga o compasso o mediante altri strumenti. Tale possibilità verrà esaminata a suo tempo (cap. VIII) e le costruzioni si indicheranno allora con la denominazione di costruzioni *grafiche*, cioè mediante il disegno.

Anche le locuzioni, quali *tracciare* o *tirare* una retta per due punti, *trasportare* o *prolungare* un segmento ecc., impiegate per brevità di linguaggio, vanno sempre considerate come operazioni della nostra mente, aventi cioè un puro carattere concettuale.