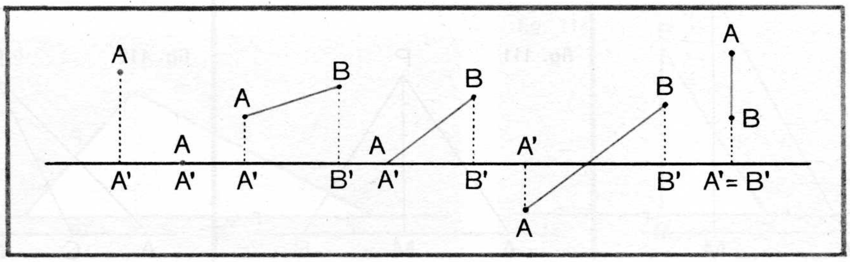


fig. 109

Perpendicolari e oblique ad una retta

94 DEFINIZIONE Data in un piano una retta r, si dice **proiezione ortogonale** o semplicemente **proiezione di un punto del piano sulla retta** r il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.

95 DEFINIZIONE Si chiama **proiezione di un segmento** AB sopra una retta r il segmento $A'B'$ della retta r compreso fra le proiezioni, sulla retta, degli estremi A, B del segmento dato AB.

Nella fig. 109 sono indicati i vari casi che si possono presentare. Si deve notare, in particolare, che la proiezione sopra una retta di un punto della retta stessa coincide con il punto medesimo e che la proiezione sulla retta di un segmento ad essa perpendicolare si riduce a un punto, cioè è un segmento nullo.

96 TEOREMA Fra i segmenti che uniscono un punto P con i punti di una retta si verificano le seguenti proprietà:

1) il segmento perpendicolare è minore di qualunque segmento obliquo;

2) due segmenti obliqui aventi proiezioni congruenti sono congruenti;

3) due segmenti obliqui aventi proiezioni disuguali sono disuguali ed è maggiore quello che ha proiezione maggiore.

1) Dal punto P esterno alla retta r si conduca la perpendicolare PM e il segmento obliquo PA (ipotesi); diciamo che è $PM < PA$ (tesi) (fig. 110).

Infatti, il triangolo PAM è rettangolo in M e l'ipotenusa PA è maggiore del cateto PM (n. 84).

2) Sia PB un altro segmento obliquo tale che risulti $MA \cong MB$ (ipotesi); diciamo che i due segmenti obliqui PA e PB sono pure congruenti (tesi) (fig. 111).

Infatti, i triangoli rettangoli PMA e PMB sono congruenti perchè hanno i cateti rispettivamente congruenti e perciò sono congruenti anche le ipotenuse, cioè $PA \cong PB$.

3) Siano PA e PB due segmenti obliqui e sia $MA > MB$ (ipotesi); diciamo

fig. 110

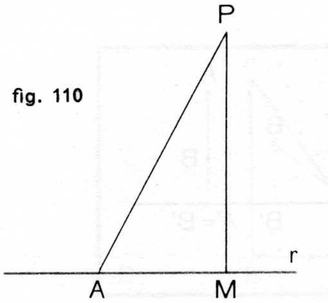


fig. 111

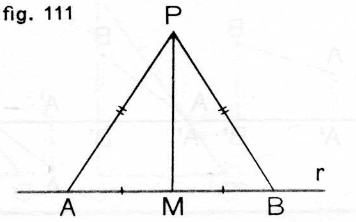
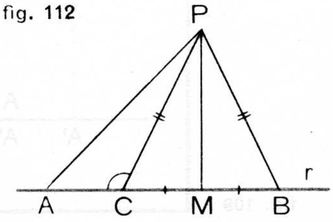


fig. 112



che il segmento obliquo PA è maggiore del segmento obliquo PB (tesi) (fig. 112).

Infatti, si prenda su MA un punto C, tale che sia $MB \cong MC$ e si congiunga P con C. Il triangolo CPB risulta isoscele e perciò l'angolo alla base $\widehat{PCB}$ è acuto (n. 61) e l'angolo adiacente $\widehat{PCA}$ è allora ottuso. Considerando il triangolo PAC, se ne deduce che il lato PA è maggiore del lato PC (n. 85). Ma $PC \cong PB$; quindi $PA > PB$.

97 Anche in questo caso, invertiamo il teorema ora dimostrato, facendo ricorso alla legge, a noi ormai familiare, che va sotto il nome di *seconda legge delle inverse*.

Sopra due segmenti, che uniscono un punto P con i punti di una retta, tutte le ipotesi che possiamo fare sono le seguenti:

1) uno di essi è perpendicolare e l'altro obliquo alla retta;

2) essi sono segmenti obliqui, tali che la proiezione del primo è congruente a quella del secondo;

3) essi sono segmenti obliqui, tali che la proiezione del primo è maggiore di quella del secondo;

4) essi sono segmenti obliqui, tali che la proiezione del primo è minore di quella del secondo.

(Osserviamo che la quarta ipotesi contiene la prima).

Queste ipotesi hanno condotto a tesi che si escludono a vicenda; allora sono veri i teoremi inversi, che compendiamo nel quadro seguente, assieme ai teoremi diretti:

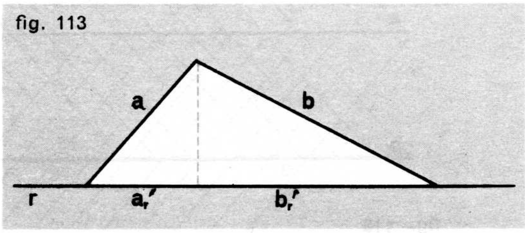
1), 4) $a_r' < b_r' \Leftrightarrow a < b$

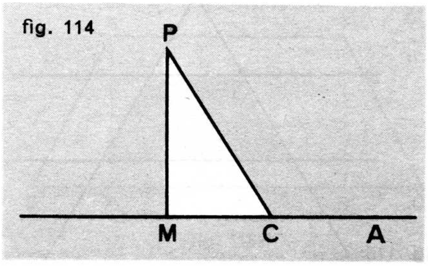
2) $a_r' \cong b_r' \Leftrightarrow a \cong b$

3) $a_r' > b_r' \Leftrightarrow a > b$

in cui a_r', b_r' sono le proiezioni rispettivamente di a, b sopra la retta r (fig. 113).

98 OSSERVAZIONE La definizione di distanza fra un punto e una retta (cap. III, n. 66) è legata ad un concetto di minimo: quel segmento è il minore fra tutti i segmenti che uniscono P con i punti della retta.





99 TEOREMA La proiezione di un punto qualunque di un lato di un angolo acuto sull'altro lato appartiene a questo lato; la proiezione di un punto di un lato di un angolo ottuso sopra la retta sostegno del secondo lato cade sul prolungamento di questo lato.

Infatti nel triangolo rettangolo PCM (fig. 114) l'angolo $\widehat{PCM}$ è acuto e la proiezione di P cade sul lato CM dell'angolo; inoltre, $\widehat{PCA}$, supplementare di $\widehat{PCM}$, è un angolo ottuso e la proiezione di P cade sul prolungamento del lato CA.