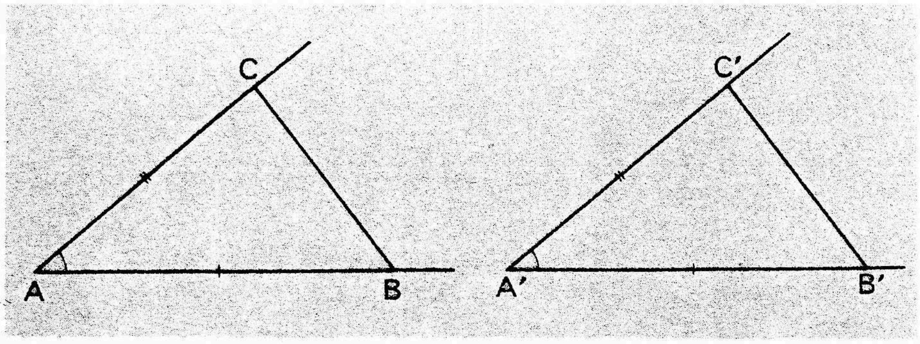

fig. 61

tiene al lato e adiacente agli altri due. Viceversa, ogni angolo si dice opposto al lato che non contiene il suo vertice e adiacente agli altri due.

È facile provare l'esistenza di triangoli con due lati congruenti; più avanti sarà provata quella con i tre lati congruenti.

Un triangolo con due lati congruenti si dice isoscele; se tutti e tre i lati sono congruenti si dice equilatero; se i tre lati sono disuguali si dice scaleno.

In un triangolo isoscele il punto dove concorrono i lati congruenti si dice vertice del triangolo isoscele; l'angolo compreso dai lati congruenti si dice angolo al vertice; il lato opposto al vertice si chiama base e gli angoli a questo adiacenti si dicono angoli alla base.

OSSERVAZIONE Un triangolo equilatero si può considerare isoscele in tre modi diversi, potendosi considerare come base uno qualsiasi dei tre lati.

Criteri di congruenza dei triangoli

48 I CRITERIO **Se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso fra essi ordinatamente congruenti, i due triangoli sono congruenti.**

Nei triangoli ABC, $A'B'C'$ della fig. 61 sia $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$; $\widehat{CAB} \cong \widehat{C'A'B'}$ (ipotesi); si deve dimostrare che i due triangoli sono sovrapponibili e perciò congruenti (tesi).

Infatti, un movimento che sovrappone l'angolo $\widehat{CAB}$ al suo congruente $\widehat{C'A'B'}$, in modo che la semiretta AB coincida con la semiretta $A'B'$ e la semiretta AC con la semiretta $A'C'$, sovrappone il segmento AB al suo congruente $A'B'$ e il segmento AC al suo congruente $A'C'$; quindi il vertice B a B', il vertice C a C'; e quindi il lato BC a $B'C'$.

Il triangolo ABC si viene dunque a sovrapporre al triangolo $A'B'C'$; perciò i due triangoli sono congruenti.

49 Una immediata conseguenza del criterio di congruenza ora dimostrato è quella espressa dalla seguente proposizione.

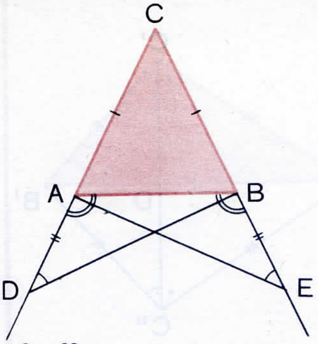

fig. 62

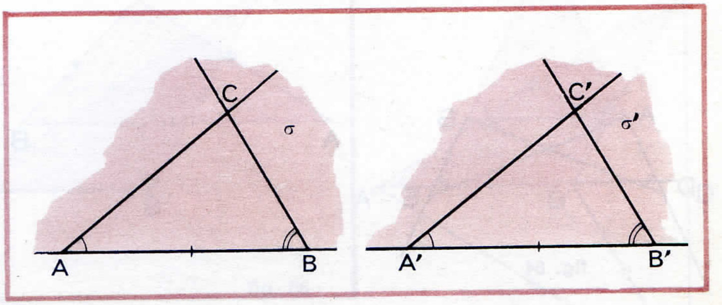

fig. 63

TEOREMA In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

Nel triangolo ABC (fig. 62) sia $CA \cong CB$ (ipotesi); diciamo che è $\widehat{CAB} \cong \widehat{CBA}$ (tesi).

Per la dimostrazione consideriamo sui prolungamenti dei lati CA e CB due segmenti AD, BE congruenti fra loro e poi congiungiamo A con E e B con D. I due triangoli CAE, CBD che ne risultano hanno $CA \cong CB$ per ipotesi; $CE \cong CD$ perchè somme di segmenti congruenti; l'angolo $\widehat{C}$ in comune. Per conseguenza, i due triangoli — avendo due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti — sono congruenti (I criterio di congruenza): in essi sarà perciò:

$$AE \cong BD \quad \text{e} \quad \widehat{AEC} \cong \widehat{BDC}.$$

Ne segue che anche i due triangoli AEB e BDA sono congruenti per lo stesso criterio (perchè $BE \cong AD$, $AE \cong BD$ e $\widehat{BEA} \cong \widehat{ADB}$) e perciò in particolare sono congruenti gli angoli $\widehat{ABE}$, $\widehat{BAD}$. Sono di conseguenza congruenti anche gli angoli alla base del triangolo isoscele, perchè sono supplementari di angoli congruenti.

Segue in particolare dal teorema precedente, in base all'osservazione del n. 47, il

COROLLARIO Gli angoli di un triangolo equilatero sono congruenti fra loro, ossia un triangolo equilatero è anche equiangolo.

50 II CRITERIO **Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli ad esso adiacenti, essi sono congruenti.**

Nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ della fig. 63, sia $AB \cong A'B'$; $\widehat{CAB} \cong \widehat{C'A'B'}$; $\widehat{CBA} \cong \widehat{C'B'A'}$ (ipotesi); vogliamo dimostrare che i due triangoli sono congruenti (tesi).

Infatti, un movimento che sovrappone il semipiano σ di origine AB e che contiene C al semipiano σ' di origine $A'B'$ e che contiene C', in modo che la semiretta AB coincida con la semiretta $A'B'$, sovrappone il segmento AB ad $A'B'$, la semiretta AC alla semiretta $A'C'$ e la semiretta BC alla semiretta $B'C'$, date le congruenze dell'ipotesi.

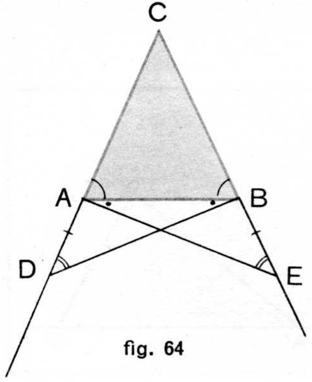

fig. 64

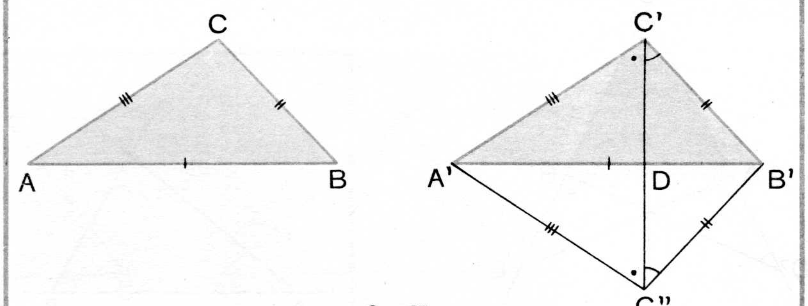

fig. 65

Perciò il punto C comune alle semirette AC, BC si sovrapporrà al punto C' comune alle semirette $A'C'$, $B'C'$. I due triangoli risultano così sovrapponibili e perciò sono congruenti.

51 TEOREMA (reciproco del n. 49) **Se in un triangolo due angoli sono congruenti, i lati ad essi opposti sono congruenti, cioè il triangolo è isoscele.**

Nel triangolo ABC (fig. 64) sia $\widehat{CAB} \cong \widehat{CBA}$ (ipotesi); diciamo che è $CA \cong CB$ (tesi).

Il teorema si dimostra con una « costruzione » analoga a quella fatta nel n. 49.

Prolungati i lati CA e CB di due segmenti congruenti AD, BE e congiunto A con E e B con D, si confrontino i due triangoli AEB, BDA: essi hanno $BE \cong AD$ per costruzione; il lato AB in comune e gli angoli $\widehat{ABE}$, $\widehat{BAD}$ congruenti perchè supplementari di angoli congruenti. I nominati triangoli sono perciò congruenti per il I Criterio; perciò risulta:

$$AE \cong BD, \qquad \widehat{BEA} \cong \widehat{ADB}, \qquad \widehat{BAE} \cong \widehat{ABD}.$$

Confrontando ora i due triangoli CEA e CDB, si nota che il lato AE è congruente al lato DB, l'angolo in E è congruente a quello in D e gli angoli $\widehat{CAE}$, $\widehat{CBD}$ congruenti perchè somme di angoli congruenti; perciò si può affermare che i due triangoli sono congruenti per il II Criterio. Sono allora congruenti i lati CA e CB, perchè corrispondenti nella congruenza dei due triangoli.

COROLLARIO (reciproco del Corollario n. 49) **Se un triangolo è equiangolo è anche equilatero.**

52 III CRITERIO **Se due triangoli hanno i lati ordinatamente congruenti, essi sono congruenti.**

Nei triangoli ABC, $A'B'C'$ della fig. 65 sia $AB \cong A'B'$; $BC \cong B'C'$; $CA \cong C'A'$ (ipotesi); diciamo che i due triangoli sono congruenti (tesi).

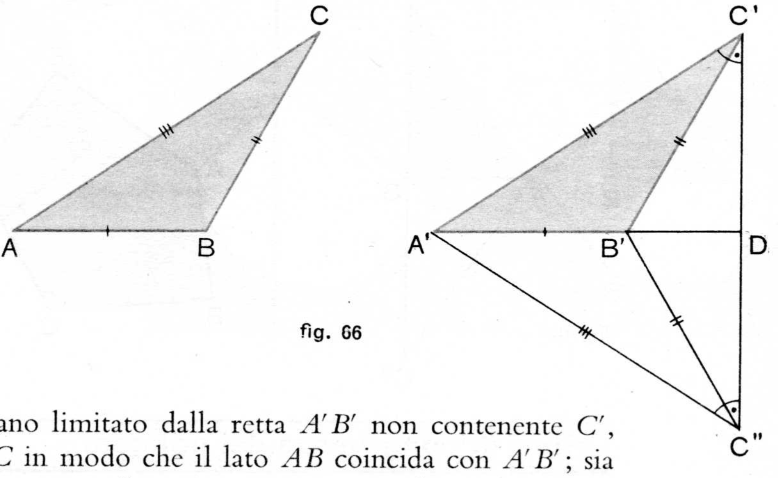

fig. 66

Infatti (fig. 65), nel semipiano limitato dalla retta $A'B'$ non contenente C', trasportiamo il triangolo ABC in modo che il lato AB coincida con $A'B'$; sia C'' la posizione che viene ad assumere il vertice C. Sarà naturalmente $A'C'' \cong AC \cong A'C'$; $B'C'' \cong BC \cong B'C'$ e l'angolo $\widehat{C''}$ sarà congruente all'angolo $\widehat{C}$.

Congiungiamo ora il punto C' con C'': il segmento $C'C''$ incontra la retta, a cui appartiene il lato $A'B'$, in un punto D, per il postulato fondamentale del piano (n. 14).

Sulla posizione di D si possono fare queste supposizioni: D è un punto interno al segmento $A'B'$, oppure coincide con un estremo di $A'B'$, oppure è un punto esterno al segmento $A'B'$.

Supponiamo, dapprima, D interno al segmento $A'B'$ (fig. 65). Il triangolo $C'A'C''$ risulta isoscele; perciò — per il teorema del n. 49 — gli angoli alla base $\widehat{A'C'C''}$, $\widehat{A'C''C'}$ sono congruenti. Analogamente, essendo isoscele il triangolo $C'B'C''$, risultano fra loro congruenti gli angoli $\widehat{B'C'C''}$, $\widehat{B'C''C'}$. Sarà quindi $\widehat{A'C'B'} \cong \widehat{A'C''B'}$, perchè somme di angoli congruenti; ma l'angolo $\widehat{C''}$ è congruente all'angolo $\widehat{C}$ e perciò questo risulterà congruente all'angolo $\widehat{C'}$. Allora i due triangoli ABC, $A'B'C'$ risultano congruenti, perchè hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti (I Criterio di congruenza).

Se il punto D è esterno al segmento $A'B'$ (fig. 66), i due angoli $\widehat{A'C'B'}$, $\widehat{A'C''B'}$ risultano congruenti perchè differenze di angoli congruenti.

Ancora più semplice è il caso in cui la retta $C'C''$ passa per un estremo del segmento $A'B'$ (fig. 67). Lasciamo perciò la dimostrazione al lettore.

pag88 c.c triang rettangoli

53 OSSERVAZIONE Se due triangoli sono congruenti, i lati e gli angoli dell'uno sono, in un certo ordine, congruenti ai lati e agli angoli dell'altro: si hanno dunque *sei* relazioni di congruenza, perchè *sei* sono gli elementi di un triangolo. I criteri di congruenza, che abbiamo dimostrato, permettono ora di affermare che per decidere se due triangoli sono congruenti bastano tre sole delle sei relazioni di congruenza ora considerate, e precisamente la congruenza di tre opportuni elementi, purchè uno almeno di essi sia un lato.