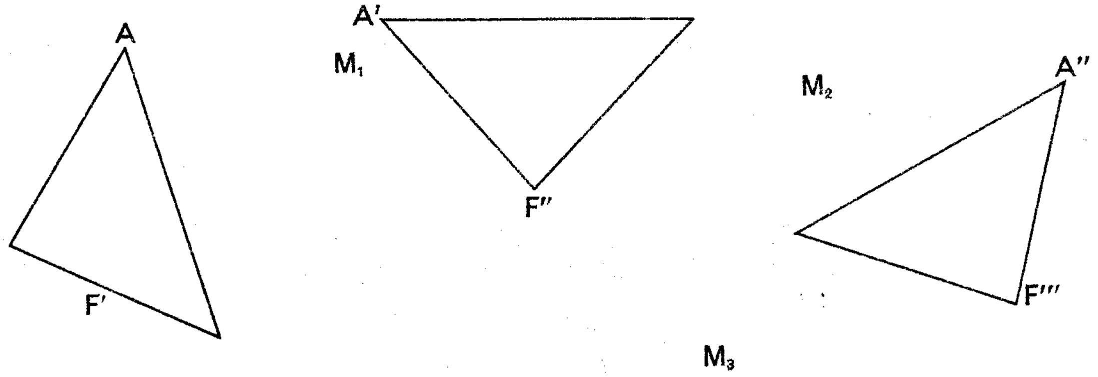


fig. 31

V) *Sopra una retta — a partire da un punto di essa — esiste, in ciascuno dei due versi, un segmento e uno solo congruente ad un segmento dato* (postulato del trasporto di un segmento) (fig. 32).

VI) *Sopra un fascio di raggi — a partire da un raggio dato — esiste, in ciascuno dei due versi un angolo ed uno solo congruente ad un angolo dato* (postulato del trasporto di un angolo).

VII) *Il segmento AB è congruente al segmento BA* (invertibilità del segmento).

VIII) *L'angolo (a, b) di due raggi è congruente all'angolo (b, a)* (invertibilità dell'angolo).

21 OSSERVAZIONE I È ormai consuetudine usare il termine **congruente** per riferirsi alla relazione esistente fra due figure, per le quali esista un movimento che le sovrapponga, cioè faccia combaciare esattamente una con l'altra.

Codesta relazione viene chiamata, correntemente, con il termine di **congruenza.** I due termini **congruente** e **congruenza** derivano manifestamente dal latino **congruère** (= concordare, coincidere) e per questo motivo essi si riconoscono come i più adatti, i più precisi per indicare la relazione precedente.

Il termine **uguale**, finora correntemente adoperato per indicare la medesima relazione, si preferisce riservarlo per indicare l'**identità logica**; (vedi cap. Introduttivo n. 15); scrivendo, per esempio, $F = F'$ s'intende che F e F' rappresentano la stessa cosa.

22 OSSERVAZIONE II Facciamo osservare che la relazione di congruenza è stata definita basandoci sul concetto primitivo di movimento rigido, il quale ci ha permesso di stabilire sia le proprietà elementari di tale relazione, e cioè le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, sia la proprietà che le rette, le semirette, i piani, i semipiani e gli angoli piatti sono congruenti fra loro, nonchè i postulati del trasporto e dell'invertibilità.

I concetti primitivi propri della Geometria, finora introdotti, sono pertanto quelli di punto, retta, piano e movimento rigido.

23 OSSERVAZIONE III Date due figure congruenti F e F', può darsi che ogni movimento sovrapponga F a F' *in un solo modo*: è il caso di due semirette (fig. 33) o, come vedremo, di due triangoli scaleni; oppure può darsi che F si

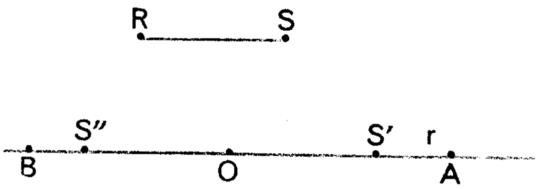


fig. 32

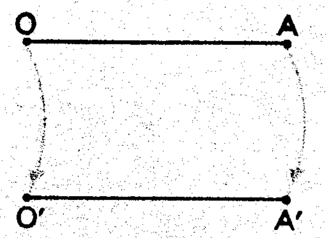


fig. 33

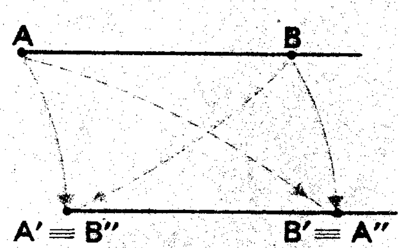


fig. 34

possa sovrapporre a F' *in due modi*: è il caso di due segmenti (fig. 34) o di due angoli (fig. 35); oppure in *più modi* (anche *in numero infinito*): è il caso di due rette, di due piani, di due semipiani.

Si dice, nei vari casi, che le due figure sono congruenti rispettivamente « *in un modo* », « *in due modi* », « *in più modi* ».

Confronti di segmenti

24 DEFINIZIONI Un segmento CD si dice **parte** di un altro segmento AB quando tutti i punti di CD appartengono ad AB, ma non viceversa (fig. 36).

Dati due segmenti AB, CD, sovrapponiamo la semiretta AB alla semiretta CD, in modo che A coincida con C.

Se $AB \cong CD$, i punti B e D coincideranno. Se AB non è congruente a CD, il punto B cadrà o a sinistra di D, oppure, come in figura 37, a destra di D. In quest'ultimo caso, CD è congruente ad una parte di AB. Si dice allora che CD è **minore** di AB, oppure che AB è **maggiore** di CD e si scrive:

$$CD < AB$$

oppure:

$$AB > CD.$$

L'intuizione ci dice che, dati due segmenti AB, CD, si verifica **sempre una e una sola** di queste relazioni:

1) $$AB \cong CD$$
2) $$AB > CD$$
3) $$AB < CD.$$

Faremo riferimento a questo postulato chiamandolo **legge di esclusione**. Essa afferma la necessità che una delle tre relazioni si verifichi e che il verificarsi di una di esse esclude le altre due.

Inversamente, il non verificarsi di due di esse implica il verificarsi della terza.

fig. 35

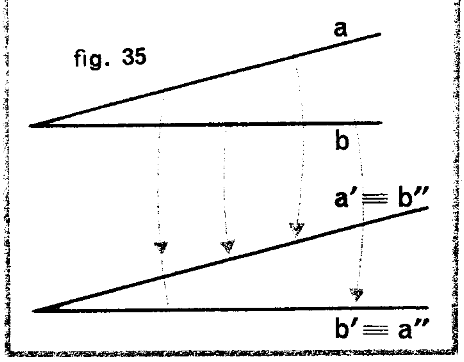


fig. 36

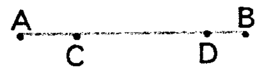
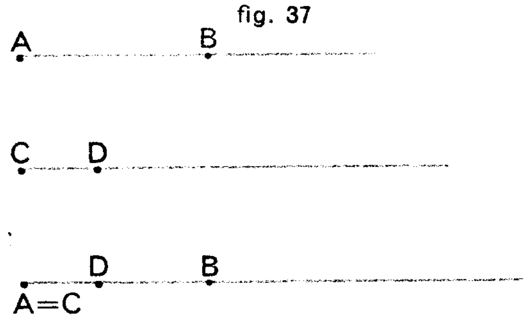


fig. 37



OSSERVAZIONE Le due ultime relazioni si chiamano, genericamente, relazioni di **disuguaglianza** e, in particolare, relazione di **maggioranza** si chiama la seconda, relazione di **minoranza** la terza.

Somma e differenza di segmenti

25 Due segmenti AB, BC si dicono *consecutivi* se hanno un estremo in comune (fig. 38). Due segmenti consecutivi si dicono *adiacenti* se appartengono ad una stessa retta e non hanno in comune alcun punto interno (fig. 39).

DEFINIZIONE Dati sopra una retta *due segmenti adiacenti* AB, BC (fig. 40) il segmento AC, individuato dagli estremi non comuni, si dice **somma** dei segmenti medesimi o di due altri segmenti ad essi congruenti, e si scrive:

$$AC = AB + BC.$$

L'operazione che a due segmenti, dati in un certo ordine, fa corrispondere un terzo segmento, somma dei primi due, si chiama **addizione**.

In modo analogo si definisce la somma di più segmenti consecutivi di una stessa retta.

Si dice poi **somma di più segmenti**, dati in un certo ordine, ogni segmento che sia somma di segmenti consecutivi di una medesima retta e ordinatamente congruenti ai dati.

Se a, b, c, ..., m sono i segmenti dati tale somma si indica con

$$a + b + c + \ldots + m.$$

OSSERVAZIONE La somma di due segmenti a e b, si può ottenere in infiniti modi, tuttavia i segmenti somma sono fra loro congruenti: costituiscono, come si dice, una classe di infiniti segmenti congruenti, e con la scrittura « $a + b$ » intenderemo indicare uno qualsiasi di questi segmenti che, pertanto, assume il significato di « *rappresentante* » della classe.

Ciò vale, naturalmente, anche per la somma di tre o più segmenti.

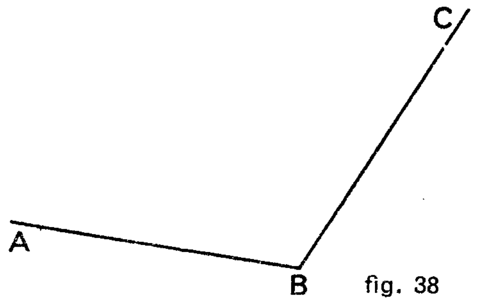


fig. 38

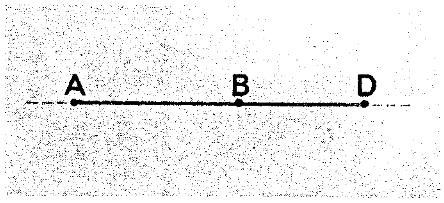


fig. 39

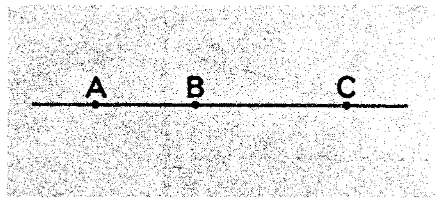


fig. 40

In base a tale osservazione ci sentiamo autorizzati ad affermare che l'addizione tra segmenti è un'*operazione a risultato unico.*

26 Ci limitiamo ad enunciare simbolicamente, senza far seguire la dimostrazione, la **proprietà commutativa** e la **proprietà associativa** dell'addizione fra segmenti:

(1) $$a + b = b + a$$

(2) $$(a + b) + c = a + (b + c).$$

27 Se a, b, c, d sono quattro segmenti, si dimostrano inoltre le seguenti proprietà:

(1) $$(a \cong b \text{ et } c \cong d) \Rightarrow (a + c \cong b + d)$$

(2) $$(a > b \text{ et } c > d) \Rightarrow (a + c > b + d)$$

(3) $$(a < b \text{ et } c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)$$

Osservando le ultime due proposizioni, si può dire che, *addizionando ordinatamente i membri di due disuguaglianze dello stesso senso, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso.*

28 Il segno $\gtrsim$ si legge maggiore o congruente; quindi la scrittura

$$a \gtrsim b$$

in cui a, b indicano segmenti s'interpreta in questo modo: a **è congruente o maggiore di** b, oppure, con locuzioni equivalenti, a **non è minore di** b, b **non è maggiore di** a, od anche b **non supera** a.

DEFINIZIONE Dati due segmenti a e b, di cui $a \gtrsim b$, si dice **differenza** di (o fra) a e b il segmento c che, addizionato a b dà per somma a, cioè

$$b + c = a.$$

La differenza c fra a e b si indica con la scrittura «$a - b$» e quindi

$$c = a - b.$$

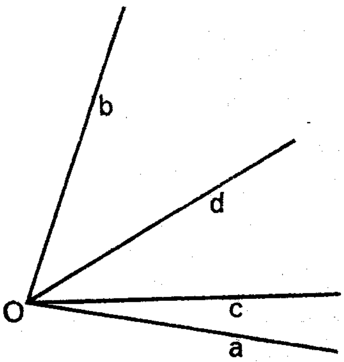


fig. 41

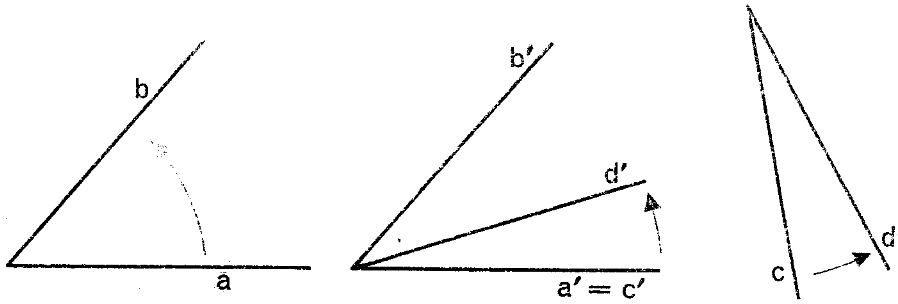


fig. 42

Se $a \cong b$, c è un segmento nullo.

L'operazione che a due segmenti, dati in un certo ordine e tali che il secondo non superi il primo, fa corrispondere un terzo segmento, differenza dei primi due, si chiama **sottrazione.**

Enunciamo, simbolicamente, senza dimostrazione, la proprietà:

1) $$(a \cong b \text{ et } c \cong d \text{ et } a > c) \Rightarrow a - c \cong b - d\,,$$

che si esprime a parole così:

Differenze fra segmenti ordinatamente congruenti sono congruenti.

29 La somma di n segmenti congruenti a un segmento dato a si dice **multiplo di a secondo il numero n** (oppure di *ordine* n) e si indica con na.

Si dice invece **sottomultiplo** o **summultiplo di a secondo il numero n** (oppure di *ordine* n) e si denota con $\dfrac{a}{n}$ (oppure con a/n, oppure con $\dfrac{1}{n}\,a$), il segmento il cui multiplo secondo n è uguale ad a.

I successivi multipli di a si dicono: *il doppio, il triplo, il quadruplo*, ecc. di a.

I successivi sottomultipli di un segmento a si dicono: *la metà, la terza parte, la quarta parte*, ecc. di a.

Confronto di angoli

30 DEFINIZIONI Si dice che *un angolo* è « **una parte** » di un altro angolo quando i raggi del primo sono anche raggi del secondo, ma non viceversa.

Ad esempio, nella fig. 41 (c, d) è parte di (a, b).

Dati due angoli (a, b) e (c, d), consideriamo, in uno stesso fascio di raggi, gli angoli (a', b') e (c', d'), equiversi, congruenti rispettivamente ad (a, b) e (c, d) e tali che a' coincida con c'.

Se tutti i raggi di (a', b') sono anche raggi di (c', d') e viceversa, i due angoli

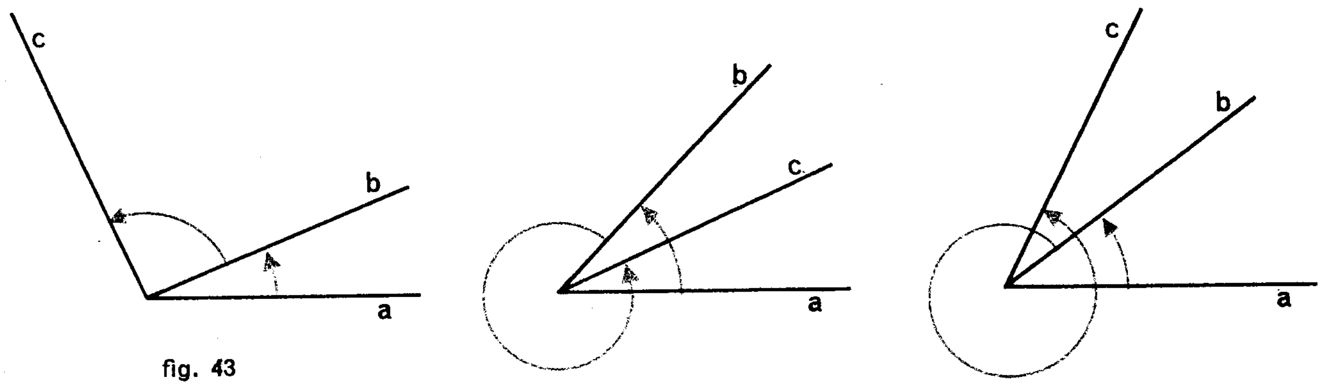


fig. 43

(a, b) e (c, d) sono congruenti; se invece $(c'd')$ è una parte di $(a'b')$ (fig. 42), si dice che (a, b) è **maggiore** di (c, d), oppure che (c, d) è **minore** di (a, b) e si scrive

$$(a, b) > (c, d)$$

oppure

$$(c, d) < (a, b).$$

Postulato: Tra due angoli (a, b), (c, d) si verifica sempre **una ed una sola** delle tre relazioni:

(1) $$(a, b) \cong (c, d)$$
(2) $$(a, b) > (c, d)$$
(3) $$(a, b) < (c, d).$$

Come per i segmenti, faremo riferimento a questa proprietà chiamandola **legge di esclusione**.

31 Due angoli (a, b) e (b, c) di uno stesso fascio orientato di raggi si dicono **consecutivi** (fig. 43).

In particolare: due angoli convessi (a, b) e (b, c), consecutivi e tali che a e c siano semirette opposte, si dicono **adiacenti** (fig. 44).

Somma di angoli

32 DEFINIZIONE Dati due angoli **consecutivi** (a, b) e (b, c), l'angolo (a, c) si dice **somma dei due angoli** dati o di due angoli ad essi congruenti e si scrive

$$(a, c) = (a, b) + (b, c).$$

L'operazione che a due angoli, dati in un certo ordine, fa corrispondere un terzo angolo, somma dei primi due, si chiama **addizione**.

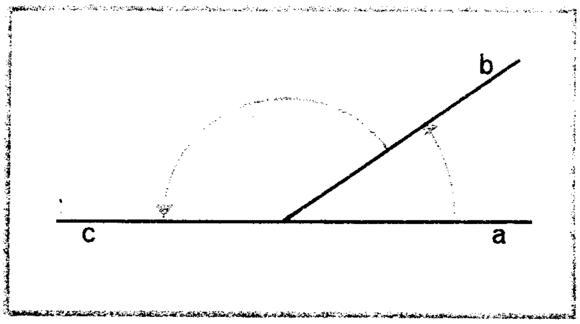


fig. 44

In modo analogo si definisce la **somma di più angoli consecutivi**.

Si dice **somma di più angoli**, dati in un certo ordine, ogni angolo che sia somma di angoli consecutivi ordinatamente congruenti ai dati.

Per l'unicità della somma di angoli valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per l'unicità della somma tra segmenti (n. 25).

33 OSSERVAZIONE La somma di più angoli può anche contenere uno o più angoli giri, dei quali va tenuto conto.

Due angoli la cui somma sia uguale ad un angolo piatto si dicono **supplementari**.

Due angoli la cui somma sia uguale ad un angolo giro si dicono **esplementari**.

Per l'addizione di angoli valgono proprietà analoghe a quelle enunciate per i segmenti, e si ottengono pertanto da esse sostituendo al termine **segmento** il termine **angolo** e ai simboli indicanti segmenti i simboli indicanti angoli.

Differenza di angoli

34 DEFINIZIONE Dati due angoli α e β, di cui β *non supera* α, si dice **differenza** di (o fra) α e β l'angolo γ che, addizionato a β, dà per somma α, cioè

$$\beta + \gamma = \alpha.$$

La differenza γ fra α e β si indica con la scrittura «$\alpha - \beta$» e quindi:

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Se $\alpha \cong \beta$, allora γ è un angolo nullo.

L'operazione che a due angoli, dati in un certo ordine e tali che il secondo *non superi* il primo, fa corrispondere un terzo angolo, differenza dei primi due, si chiama **sottrazione**.

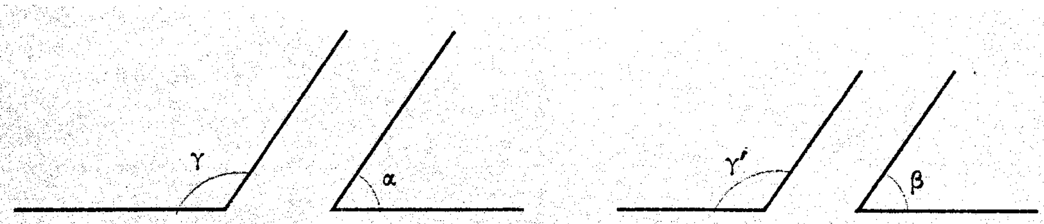


fig. 45

Enunciamo simbolicamente, senza dimostrazione, la proprietà:

$$(\alpha \cong \beta \text{ et } \gamma \cong \delta \text{ et } \alpha > \gamma) \Rightarrow \alpha - \gamma \cong \beta - \delta\,,$$

che si esprime a parole così:

Differenze fra angoli ordinatamente congruenti sono congruenti.

35 TEOREMA Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.

Osservando la fig. 45, da $\gamma \cong \gamma'$ e $\alpha + \gamma = p_1$ (= angolo piatto) e $\beta + \gamma' = p_2$ (= angolo piatto) segue:

$$\alpha = p_1 - \gamma\,,$$
$$\beta = p_2 - \gamma'\,;$$

quindi:

$$\alpha \cong \beta$$

perchè differenze di angoli congruenti.

In particolare, angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.

36 DEFINIZIONE *Due angoli convessi* si dicono **opposti al vertice** quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

TEOREMA Angoli opposti al vertice sono congruenti.

Infatti, osservando la fig. 46 si rileva che α e β sono supplementari dello stesso angolo adiacente γ, e perciò sono congruenti.

37 Quando un angolo α è la somma di n angoli congruenti a β, si dice che α è **multiplo** di β secondo n (oppure di ordine n) e che β è **summultiplo** di α secondo n (oppure di ordine n) e si scrive:

$$\alpha = n\beta, \qquad \beta = \frac{1}{n}\alpha \qquad \text{oppure} \qquad \beta = \frac{\alpha}{n}.$$

fig. 46

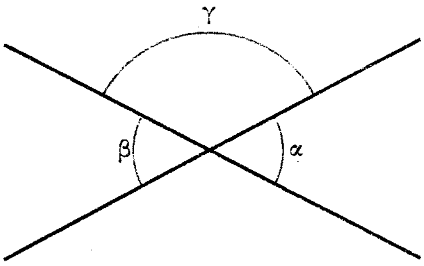
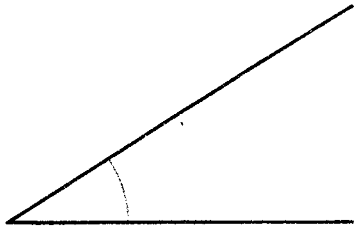


fig. 47



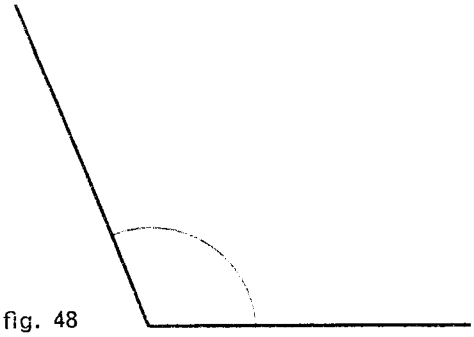


fig. 48

Se è

$$\alpha = 2\beta, \quad \beta = \frac{1}{2}\alpha$$

si dice che α è il doppio di β e che β è la metà di α.

DEFINIZIONE La metà di un angolo piatto si dice angolo retto.

38 TEOREMA Se due angoli sono congruenti, le loro metà sono pure congruenti.

Siano α e β due angoli e $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\beta}{2}$ le loro metà. Per la legge di esclusione, delle tre relazioni

$$\frac{\alpha}{2} \cong \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2},$$

una deve essere vera.

Facciamo vedere che

$$\alpha \cong \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \cong \frac{\beta}{2}.$$

Se fosse

$$\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$$

seguirebbe

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}$$

(proprietà delle disuguaglianze dello stesso senso, n. 27) e cioè

$$\alpha > \beta,$$

relazione che contraddice l'ipotesi.

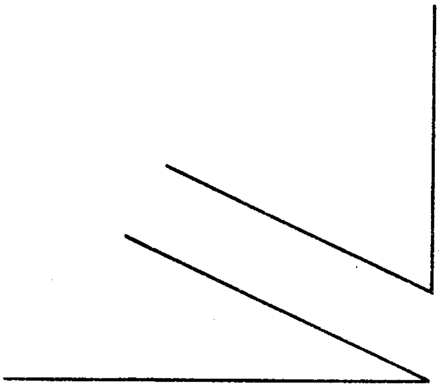


fig. 49

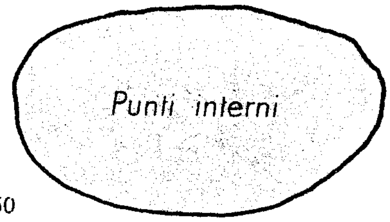


fig. 50

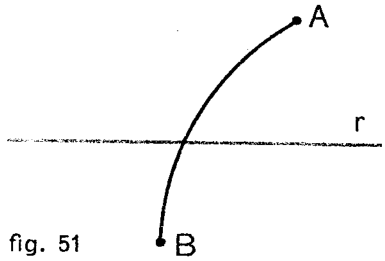


fig. 51

Si arriva ugualmente all'assurdo supponendo

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2}.$$

Dunque il teorema è vero.

COROLLARIO **Tutti gli angoli retti sono congruenti.**

Infatti sono metà di angoli congruenti.

39 Un angolo minore di un angolo retto si dice **acuto** (fig. 47) e un angolo maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto si dice **ottuso** (fig. 48).

Due angoli la cui somma è un angolo retto si dicono **complementari** (fig. 49).

Si stabilisce, con una dimostrazione analoga a quella fatta nel n. 35, che angoli complementari di angoli congruenti (o dello stesso angolo) sono congruenti.

40 Diamo ora alcune nozioni che ci serviranno nei capitoli successivi.

Una linea di cui nessuna sua parte sia un segmento si dice **curva**. Una curva tracciata in un piano si dice **curva piana** e, in caso contrario, **curva sghemba**.

Il tratto di linea compreso tra due punti A e B si chiama **arco**, di cui i punti A e B sono gli estremi.

Diremo che una curva è **chiusa** se, partendo da uno qualunque dei suoi punti e percorrendo tutta la linea sempre nello stesso senso, si può ritornare al punto di partenza. Una linea non chiusa si dice **aperta**.

Una linea piana e chiusa si dirà **semplice** o **non intrecciata** se non interseca mai se stessa: un punto che percorra una linea chiusa semplice non ripassa mai per una stessa posizione.

Ammetteremo come intuitive e suggerite dalla diretta osservazione queste proposizioni.

Ogni linea chiusa si può percorrere in due versi l'uno opposto all'altro.

Una linea piana chiusa e semplice divide il piano in due regioni, una limitata e l'altra illimitata: la prima è caratterizzata dal fatto che essa contiene solamente segmenti e non intere rette come la seconda.

Tutti i punti della regione limitata si dicono **interni** alla linea e gli altri **esterni**

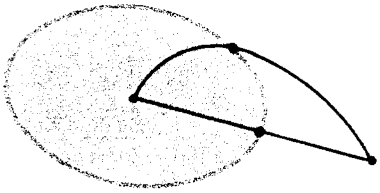


fig. 52

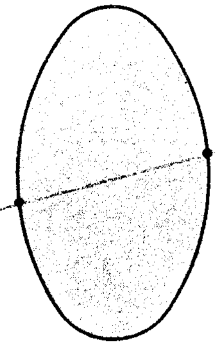


fig. 53

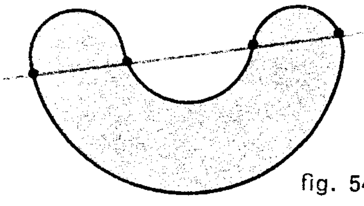


fig. 54

esclusi in ogni caso i punti della linea stessa. L'insieme dei punti di una curva piana chiusa semplice e dei punti interni costituisce una figura, di cui la linea si dice il **contorno** (fig. 50).

41 Nel postulato fondamentale del piano (n. 14) si afferma che in un piano il segmento che unisce due punti *A*, *B* situati da bande opposte di una retta *r*, interseca questa retta in un punto. È intuitivo che un'analoga proprietà spetta non solo ai segmenti, ma anche ad ogni altro arco di linea piana che unisca *A* con *B* (fig. 51).

È pure intuitivo che se in un piano è tracciata una linea chiusa semplice, quando si voglia passare da un punto interno ad uno esterno percorrendo un segmento di retta o un arco di linea qualunque, si deve necessariamente a un certo momento attraversare la linea (fig. 52).

Ammetteremo perciò il seguente

POSTULATO (che generalizza quello del piano) *Il segmento o qualunque arco di linea che abbia per estremi due punti A e B situati da bande opposte di una retta di un piano, oppure l'uno interno e l'altro esterno a una linea piana chiusa semplice, interseca la retta o la linea almeno in un punto.*

42 Una linea piana chiusa semplice si dice **convessa** se ogni retta passante per un qualsiasi punto interno interseca il contorno in **due soli punti** (fig. 53). Se invece esiste qualche retta che passando per un punto interno interseca il contorno **in più di due punti**, la linea si dice **concava** (fig. 54).

43 Per comodità dell'allievo elenchiamo le lettere minuscole e maiuscole dell'alfabeto greco, che vengono spesso usate per indicare le figure.

Minuscole: α (*alfa*), β (*beta*), γ (*gamma*), δ (*delta*), ε (*epsilon*), ζ (*zeta*), η (*eta*), θ (*theta*), ι (*iota*), κ (*kappa*), λ (*lambda*), μ (*mi*), ν (*ni*), ξ (*xi*), ο (*omicron*), π (*pi*), ρ (*rho*), σ (*sigma*), τ (*tau*), υ (*ypsilon*), φ (*fi*), χ (*chi*), ψ (*psi*), ω (*omega*).

Maiuscole: Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω.