

fig. 17

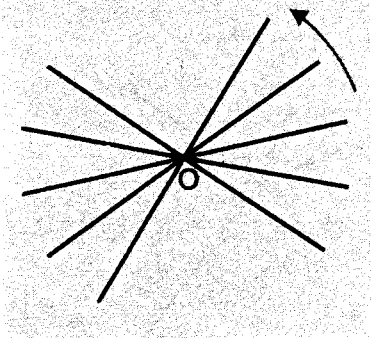


fig. 18

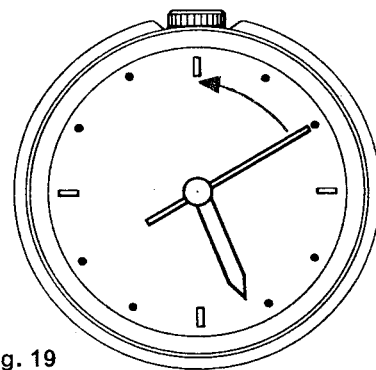
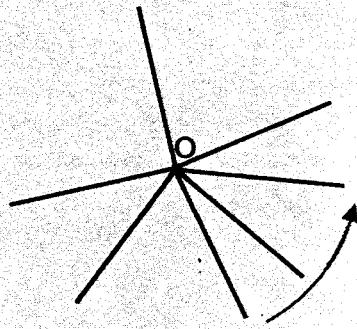


fig. 19

10 DEFINIZIONI Si chiama **fascio di rette** la figura formata da tutte le rette di un piano che passano per un punto O di questo piano, detto **centro** o **sostegno** del fascio (fig. 17).

Si chiama **fascio di raggi** o di semirette l'insieme di tutti i raggi di un piano che escono da un punto O di questo piano (fig. 18). O si chiama (ancora) centro o sostegno del fascio.

Dato un fascio di rette (o di raggi), si può immaginare che una retta del fascio possa *ruotare* attorno al centro O , in due **senzi** o **versi di rotazione** fra loro opposti, dei quali, in analogia a quanto stabilito per la retta, uno si chiamerà **positivo** e l'altro **negativo**.

Come verso positivo, che si indicherà con una freccia (figg. 17 e 18), si assume di solito quello antiorario, cioè opposto al senso in cui ruotano le lancette di un orologio collocato sul piano, con il quadrante rivolto verso l'osservatore (vedi fig. 19).

Un fascio nel quale sia stato fissato il verso positivo si dice **orientato**.

11 Un insieme ordinato di due elementi di qualsiasi natura si chiama **coppia** e si designa racchiudendo entro parentesi rotonda i simboli degli elementi scritti nell'ordine stabilito.

Ad es., la scrittura (a, b) rappresenta l'insieme ordinato di due elementi indicati con a e b ed in cui a è il primo e b il secondo degli elementi dell'insieme.

12 Considerato un fascio orientato di raggi, fissiamo in esso un raggio a (fig. 20). Diremo che

1°) ogni altro raggio del fascio *segue* il raggio a ;

2°) di due raggi b e c (diversi da a) b *precede* c oppure c *segue* b qualora a , ruotando nel verso prescelto come positivo per ritornare su se stesso, incontri *prima* b e *poi* c .

Premesso ciò, daremo la seguente

DEFINIZIONE: Considerato un fascio *orientato* di raggi, si dice **angolo** di due raggi distinti a e b l'insieme dei raggi a e b e di quelli che, fissato il raggio a , precedono b nel verso prescelto. Il raggio a si chiama *primo lato* dell'angolo, il raggio b si chiama *secondo lato*. Genericamente a e b si chiamano **lati** dell'angolo.

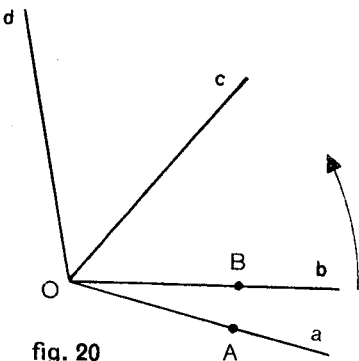


fig. 20

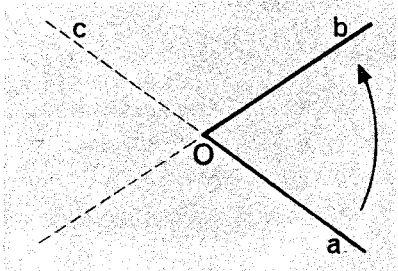


fig. 21

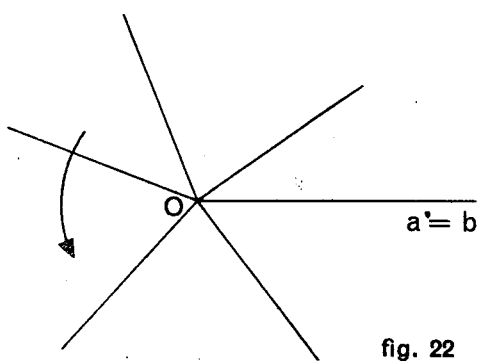


fig. 22

Ogni altro raggio dell'angolo, diverso dai lati, si chiama **raggio interno**; il centro O del fascio si dice **vertice** dell'angolo. Un angolo, in cui a sia il primo lato e b il secondo lato, verrà indicato con il simbolo (a, b) (fig. 20).

Si conviene anche di leggere un angolo nominando prima un arbitrario punto A posto sul primo lato, diverso dal vertice O , poi il vertice O e infine un arbitrario punto B , diverso da O , posto sul secondo lato.

OSSERVAZIONE Mentre la coppia di punti (A, B) di una retta determina su di essa un verso di percorrenza, e precisamente il verso AB , la coppia di raggi (a, b) non determina un verso sopra un fascio di raggi, essendo possibile, partendo da a , raggiungere b ruotando in un verso oppure nel verso opposto.

Resta pertanto ambigua la denominazione di *angolo di lati a e b* . L'ambiguità si può togliere in questi due modi: orientando il fascio che contiene l'angolo, o indicando un raggio appartenente all'angolo. Si conviene, nel secondo caso, di indicare con la scrittura $(a, b)_c$ l'angolo di lati a, b e che ha c come raggio interno.

13 Si chiama **angolo convesso** l'angolo che non contiene, come semirette interne, i prolungamenti dei suoi lati; **angolo concavo** quello che contiene come semirette interne i prolungamenti dei lati; **angolo piatto** quello i cui lati sono due semirette opposte. Va osservato che l'angolo piatto è un particolare angolo convesso. Ad esempio, nella fig. 21, (a, b) è angolo convesso; (b, a) angolo concavo; (a, c) angolo piatto.

Nel definire l'angolo (n. 12), si è partiti dalla considerazione di due raggi distinti a e b ; si completa la nozione di angolo considerando anche il caso di due raggi a e b coincidenti: si chiama **angolo giro** (fig. 22) l'insieme delle semirette a e b coincidenti e di tutte le semirette del fascio; a e b sono ancora i lati dell'angolo e le altre semirette sono semirette interne. Si chiama invece **angolo nullo** la figura costituita dalle due semirette a e b coincidenti e prive di semirette interne (vedi fig. 23). Anche qui va notato che si tratta di due particolari angoli, il primo concavo e il secondo convesso.

OSSERVAZIONE La denominazione di **angolo giro** deriva manifestamente dall'immaginare che esso venga descritto nella rotazione completa di un raggio OA del piano attorno al centro O del fascio al quale appartiene OA . Invece, come angolo delle due semirette OA e OB , può anche definirsi la parte

fig. 23

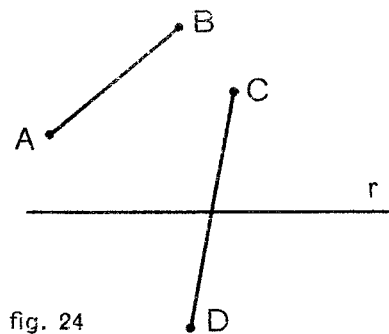
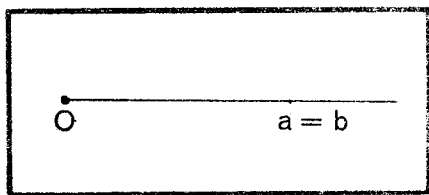


fig. 24

di piano che la semiretta OA descrive nel ruotare intorno ad O , in un verso stabilito, per andare a coincidere con la semiretta OB ; nel caso dell'angolo giro, la semiretta OA va a coincidere con la posizione da essa occupata nella posizione di partenza.

Si può anche immaginare che la semiretta OA descriva uno o più **giri** intorno al punto O , prima di fermarsi nella posizione OB , ed estendere così la denominazione di **angolo** anche a questo caso.

Allora non basterà più denotare l'angolo con il simbolo \widehat{AOB} , ma occorrerà anche indicare il numero dei **giri**.

Gli angoli descritti dalle lancette di un orologio, in vari intervalli di tempo, ci aiutano a prendere confidenza con questa estensione del concetto di angolo.

Postulato di partizione del piano

14 Aggiungiamo ora una proprietà del piano che riguarda la sua « *divisione* » o « *partizione* » in due regioni da parte di una retta del medesimo piano. Poiché tale proprietà non si può dimostrare, cioè non si può dedurre dalle proposizioni precedentemente stabilite, essa viene espressa mediante il seguente postulato:

Sia r una retta appartenente ad un piano α : l'insieme dei punti di α non appartenenti alla retta r è diviso in due regioni (fig. 24) che godono delle seguenti proprietà:

a) se i punti A e B appartengono ad una medesima regione, il segmento AB non incontra la retta r ;

b) se i punti C e D appartengono a regioni diverse, il segmento CD incontra la retta r .

Si dice che i punti A e B giacciono in una medesima regione del piano α , oppure da una medesima parte della retta r , e che i punti C e D appartengono a regioni opposte del piano α , o che giacciono da parti opposte della retta r .

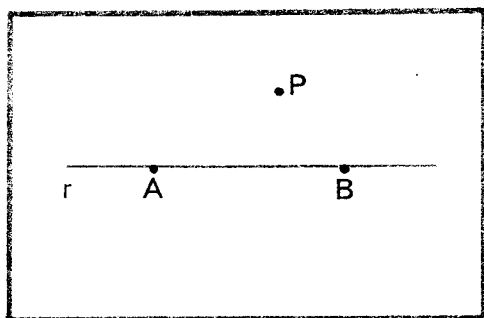


fig. 25

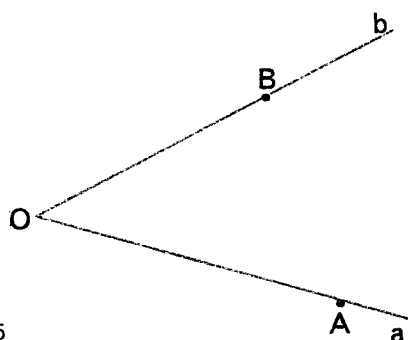


fig. 26

15 DEFINIZIONE Si dice **semipiano di origine o contorno r** la figura costituita dai punti della retta r e da quelli di una delle due regioni determinate sul piano dalla retta r .

I punti del semipiano diversi dall'origine si dicono **punti interni**.

Se due semipiani distinti di un medesimo piano hanno in comune l'origine si dicono **opposti**. In base alle definizioni di semipiano e di figura convessa risulta che un semipiano è una figura convessa. Un semipiano può essere individuato dall'origine r e da un suo punto interno P , e allora la scrittura rP indicherà tale semipiano. Può darsi che la retta sia indicata con la nota scrittura AB ; allora il simbolo $(AB)P$ rappresenta un semipiano di contorno AB e che ha P come punto interno (fig. 25). Anche le lettere $\alpha, \beta, \gamma \dots$ saranno usate — quando ciò non generi ambiguità — per indicare, oltre che i piani, i semipiani.

16 Diamo una **definizione di angolo** basata sulla seguente intuitiva proprietà, che va considerata come **postulato**: *due semirette distinte a e b uscenti da un medesimo punto O dividono i punti del piano a cui appartengono in due parti o regioni.*

Ciascuna di queste due parti, unita alle due semirette a e b , si chiama **angolo**. Le semirette a e b si dicono i **lati** e l'origine comune O si dice il **vertice** dell'angolo. L'angolo si indica con la scrittura \widehat{ab} , oppure con \widehat{AOB} , essendo A e B due punti, distinti da O , appartenenti rispettivamente alla retta a e alla retta b (fig. 26).

OSSERVAZIONE Mentre nella precedente definizione l'angolo va pensato come un insieme di semirette, in questa nuova definizione esso va pensato come un insieme di punti.

17 Consideriamo utile dare anche la seguente nuova definizione di angolo convesso:

Consideriamo due semirette OA e OB , aventi la medesima origine e non opposte: *la figura intersezione del semipiano che ha per origine la retta OA e a cui appartiene il punto B , con il semipiano che ha per origine la retta OB e a cui appartiene il punto A , si chiama angolo convesso* (fig. 27).

fig. 27

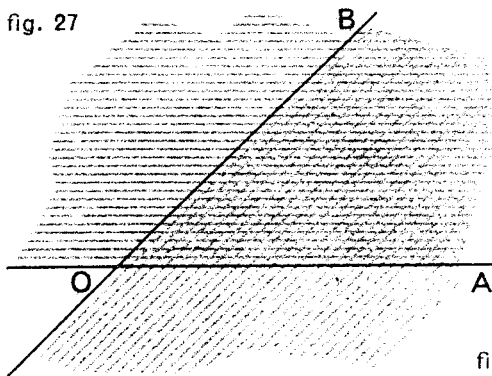


fig. 28

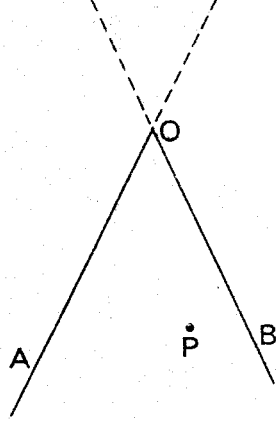
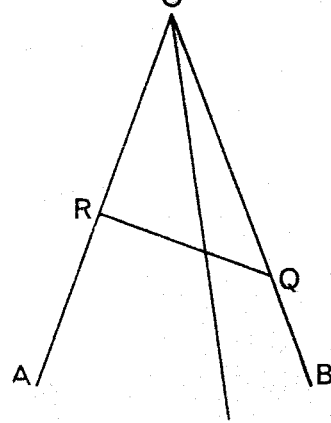


fig. 29



18 Un punto P è interno all'angolo convesso \widehat{AOB} se, rispetto alla retta OA , giace dalla parte del lato OB e rispetto alla retta OB giace dalla parte del raggio OA (fig. 28).

Ogni segmento che unisce un punto R di OA con un punto Q di OB , con R e Q diversi da O , appartiene all'angolo convesso \widehat{AOB} e si dice *corda* di quest'angolo (fig. 29).

Considerata una corda RQ , le semirette del fascio di centro O che appartengono all'angolo convesso \widehat{AOB} , sono tutte e solo quelle che incontrano la corda RQ .

La relazione di congruenza tra figure

19 Alle figure geometriche si attribuisce lo stesso carattere di rigidità, cioè di indeformabilità, attribuito, per esempio, ad una sbarra d'acciaio, ad una roccia, ecc.; e s'intende come **movimento** di un corpo materiale rigido (movimento rigido) il mutare di posizione del corpo, rispetto ad un osservatore (sistema di riferimento).

Assumiamo come primitivo il concetto di **movimento rigido**. In base ad esso poniamo questa **definizione**: due figure F e F' si dicono **geometricamente uguali** o **congruenti** e si scrive

$$F \cong F',$$

se esiste un movimento rigido che porta F a coincidere, punto per punto, con F' .

Si dice che due punti A e A' (fig. 30), appartenenti rispettivamente a F e F' , sono **corrispondenti**, se — nella suddetta relazione di congruenza — il movimento che porta F a coincidere con F' porta A a coincidere con A' .

È chiaro che ogni punto A di F viene ad avere in F' , per un determinato movimento, un solo punto corrispondente A' ; viceversa, ogni punto A' di F' avrà, come corrispondente in F , un solo punto A . Ciò si esprime dicendo che la relazione di congruenza tra due figure geometriche è una **corrispondenza biunivoca** tra i loro punti.

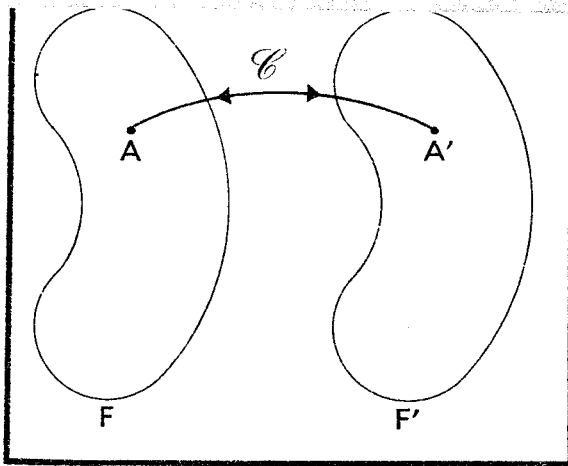


Fig. 30

Se la corrispondenza che associa i punti di F a quelli di F' si chiama **corrispondenza diretta**, quella che associa i punti di F' a quelli di F si chiama **corrispondenza inversa**.

Per indicare, in simboli, che A e A' , appartenenti rispettivamente a F e F' , si corrispondono biunivocamente nella relazione di congruenza, si usa la scrittura:

$$\cong : A \leftrightarrow A'$$

od anche:

$$A \overset{\cong}{\leftrightarrow} A'$$

dove il simbolo \cong è adoperato per indicare, appunto, la relazione di congruenza.

La suddetta relazione di congruenza si può ottenere mediante infiniti movimenti, in corrispondenza del diverso cammino percorso dalla figura F per sovrapporsi alla F' .

Postulati della relazione di congruenza

20

I) Ogni figura F è congruente a se stessa (proprietà riflessiva).

In simboli:

$$F \cong F.$$

II) Se una figura F è congruente ad una figura F' , allora F' è congruente ad F (proprietà simmetrica).

In simboli:

$$F \cong F' \Rightarrow F' \cong F.$$

III) Se due figure F' e F'' sono congruenti ad una terza figura F''' , esse sono congruenti tra loro (proprietà transitiva) (fig. 31).

In simboli:

$$(F' \cong F''' \text{ et } F'' \cong F''' \Rightarrow F' \cong F'').$$

IV) Tutte le rette sono congruenti tra loro; così pure le semirette, i piani, i semipiani, e quindi gli angoli piatti.