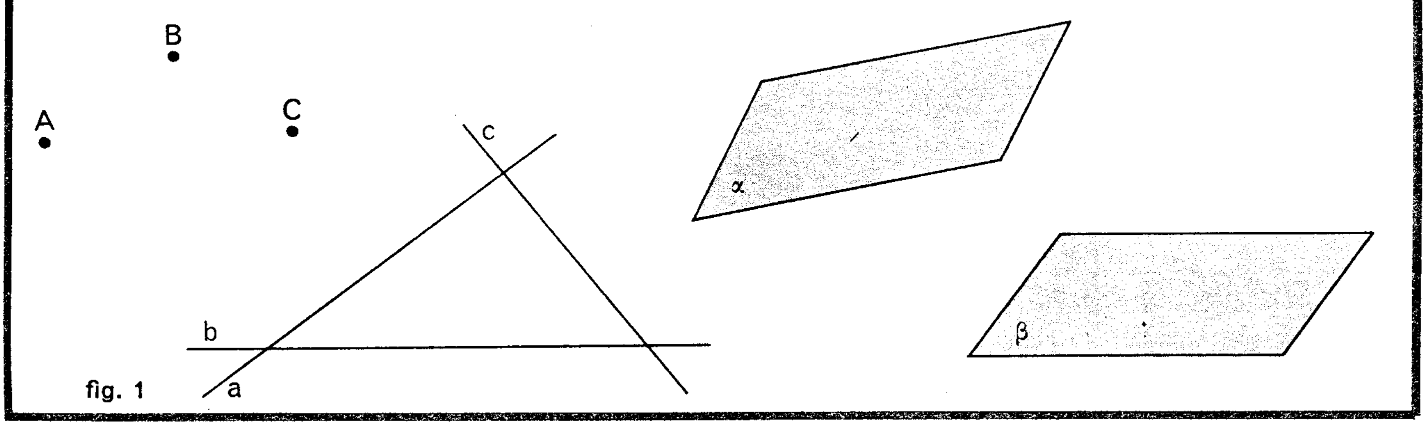


fig. 1

CAPITOLO I

I concetti primitivi della geometria e i postulati relativi

1 Concetti primitivi della geometria, denominati **elementi fondamentali,** sono il **punto,** la **retta** e il **piano.** Questi concetti vengono suggeriti al matematico, passando da una visione di essi in un mondo sensibile ad una visione immaginativa in un mondo astratto. Per esempio, il concetto di punto viene suggerito dall'osservazione di un granello di sabbia o dalla punta di uno spillo; il concetto di retta da un sottile filo di seta teso o da un raggio di luce; il concetto di piano dalla superficie tranquilla di uno specchio d'acqua.

Si indicheranno i punti, le rette e i piani rispettivamente con lettere latine maiuscole A, B, C...; con lettere latine minuscole a, b, c...; con lettere minuscole greche α, β, γ... e saranno rappresentati graficamente come in figura 1.

DEFINIZIONE *Qualunque insieme di punti si dice figura geometrica.*

Si dice che un punto dell'insieme **appartiene** alla figura e che la figura **contiene** il punto. Se il punto non appartiene alla figura, si dice che è **esterno** ad essa. Anche un singolo punto costituisce una figura geometrica.

2 DEFINIZIONE **Spazio** *è la figura che contiene tutti i punti e quindi tutte le figure.*

3 Due figure, che abbiano punti in comune, si dicono **incidenti** e la figura formata dai punti comuni si dice **figura intersezione** o semplicemente **intersezione** delle due figure.

Se si indicano con F_1 e F_2 (si legge rispettivamente F *con uno* ed F *con due*) due figure e con F la loro intersezione, si scrive:

$$F = F_1 \cap F_2 \tag{1}$$

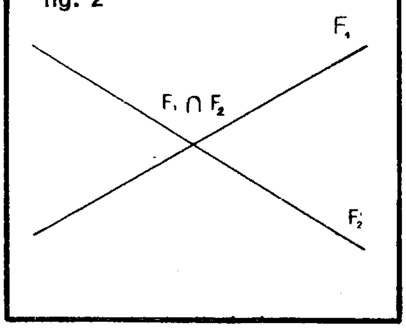


fig. 2

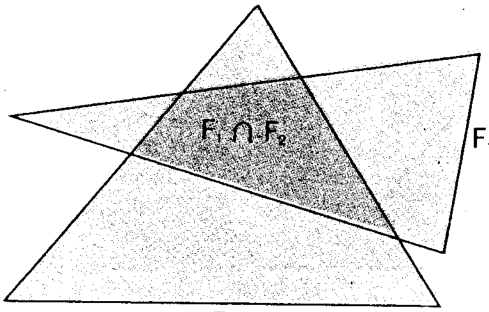


fig. 3

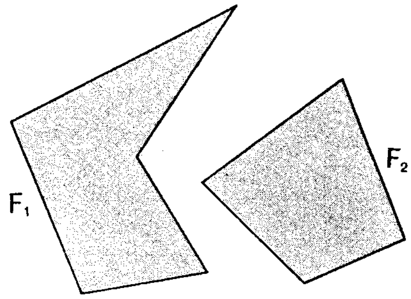


fig. 4 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$

e si legge F *è uguale* a F_1 *intersecato* F_2, dove $\cap$ è il **simbolo di intersezione** (fig. 2-3). Il simbolo $=$ è il simbolo dell'uguaglianza logica o identità. Allora la (1) si può interpretare anche così: i simboli F e $F_1 \cap F_2$ indicano la medesima cosa. Ovviamente, si può prendere in considerazione anche la figura intersezione di più di due figure.

Due figure che non abbiano punti in comune (fig. 4) si dicono **non incidenti**; in questo caso si usa la scrittura:

$$F_1 \cap F_2 = \varnothing$$

dove il simbolo $\varnothing$ si legge **insieme vuoto**, che è dunque un insieme privo di elementi.

L'insieme vuoto si indica anche con il simbolo { }. L'insieme vuoto va considerato, in Geometria, come una figura priva di punti.

Si dice **piana** ogni figura i cui punti appartengono ad un medesimo piano; **solida** in caso contrario.

Postulati di appartenenza

4 Si postulano, cioè si ammettono come vere, le seguenti relazioni fra gli elementi primitivi:

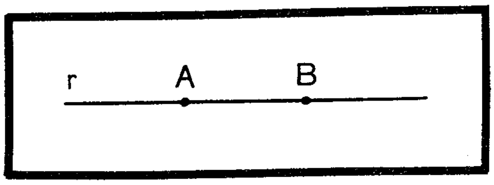
I) *Due punti distinti A e B appartengono ad una e una sola retta r* (fig. 5).

Si conviene di dire che i punti A e B **determinano** la retta r, oppure che **giacciono** sulla retta r, oppure che la retta r **passa** per i punti A e B; allora la retta r è rappresentata anche dalla scrittura AB. La locuzione **una ed una sola** sottolinea l'esistenza di una retta e l'unicità di essa.

II) *Se due punti di una retta appartengono a un piano, allora la retta appartiene al piano* (fig. 6).

III) *Tre punti distinti, non appartenenti a una retta, appartengono a uno e un solo piano* (fig. 7).

OSSERVAZIONI a) Si dice che le proposizioni I), II) e III), costituiscono dei fig. 5



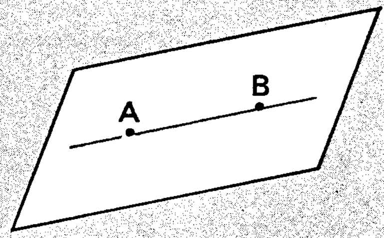


fig. 6

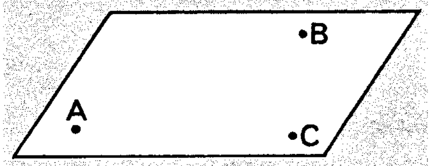


fig. 7

postulati di appartenenza perchè stabiliscono semplici ed immediate relazioni di appartenenza tra gli **elementi fondamentali** *punto, retta, piano.*

b) Dalle proposizioni precedenti segue immediatamente che:

1) *due rette che hanno due punti in comune coincidono*;

2) *la figura intersezione di due rette distinte incidenti è costituita da un solo punto.*

c) Ed inoltre: *due rette incidenti appartengono ad uno ed un solo piano.* Infatti (fig. 8), presi rispettivamente sulle rette a e b i punti P e Q diversi dalla intersezione O, esiste per il postulato III) un solo piano α passante per P, Q, O, al quale — per il postulato II) — apparterranno le rette $OP = a$, $OQ = b$.

d) Rileviamo nelle proposizioni precedenti la presenza di concetti che appartengono alla geometria, quali *punto, retta, piano* e che si usano quindi chiamare **concetti pertinenti**, e concetti non appartenenti alla geometria, quali *uno, due, tre, appartenere a, non,* che si chiamano invece **concetti presupposti**, senza i quali, cioè, non si potrebbe fare della geometria.

e) Invece di **appartenere a**, si adoperano anche le locuzioni **giacere in, avere in comune con** ed altre equivalenti.

f) Fissiamo l'attenzione sulla struttura della proposizione II): essa è composta di due parti — che sono pure delle proposizioni — che si chiamano l'una **proposizione antecedente** o semplicemente **antecedente** o **ipotesi** (due punti di una retta appartengono ad un piano), l'altra **proposizione conseguente** o semplicemente **conseguente** o **tesi** (la retta appartiene al piano). Queste due parti sono legate tra di loro dal connettivo **se... allora**, che può essere sostituito con le locuzioni di eguale significato **dunque, si deduce che, ne deriva che**, ecc.

In apparenza le proposizioni I) e III) non hanno la struttura ora analizzata, mentre si può riconoscere che possiedono tale struttura; infatti, esse si possono enunciare in questo modo:

I) *Se* due punti A e B sono distinti, *allora* essi appartengono ad una ed una sola retta.

II) *Se* tre punti non appartengono ad una retta, *allora* essi appartengono ad uno ed un solo piano.

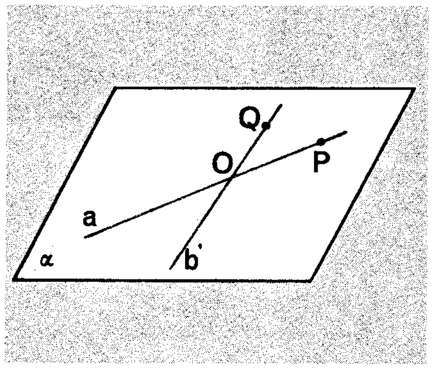


fig. 8

Solo per semplicità di linguaggio le suddette proposizioni si scrivono generalmente nella forma data per prima.

La struttura ora analizzata rappresenta la struttura sintattica, che è caratteristica delle proposizioni delle discipline assiomatiche come l'Aritmetica, l'Algebra, la Geometria, la Meccanica.

Postulati dell'ordine

5 Il concetto primitivo di ordine espresso dalla locuzione **giacere tra**, riferito a punti appartenenti a una retta, è definito implicitamente dalle seguenti proposizioni primitive, che costituiscono i postulati dell'ordine:

I punti di una retta sono disposti secondo due **ordini naturali** o **versi** o **sensi**, opposti uno dell'altro, che si ottengono l'uno dall'altro scambiando le parole **precede** e **segue**, in modo che:

I) *dati due punti A e B, uno di essi precede l'altro, il quale allora segue il primo;*

II) *se A precede B e B precede C, allora A precede C* (fig. 9);

III) *se A precede B, vi è qualche punto che segue A e precede B;*

IV) *non esiste alcun primo punto (precedente tutti gli altri) nè alcun ultimo.*

Le proposizioni I) e II) rispecchiano l'idea intuitiva della retta come linea aperta; la III) stabilisce che la retta è un **insieme denso**, cioè che fra due punti A e B qualsiasi di una retta ve ne sono degli altri distinti da A e B, da cui risulta poi che codesti punti intermedi sono infiniti; la IV) dichiara che la retta è illimitata da tutte e due le parti.

6 Dal numero precedente risulta che i punti di una retta si possono pensare ordinati in due versi (o sensi), fra loro opposti, in corrispondenza dei due versi secondo i quali si può immaginare di percorrere una retta. Quando occorra distinguerli, si chiama uno dei due, scelto ad arbitrio, **verso positivo**, indicandolo nella figura mediante una freccia (fig. 10), e l'altro **verso negativo**. Una retta su cui sia stato fissato un determinato verso (di percorrenza) positivo si chiama

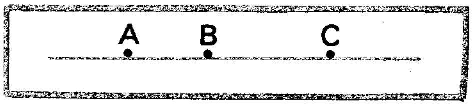


fig. 9

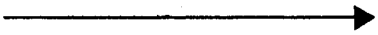


fig. 10

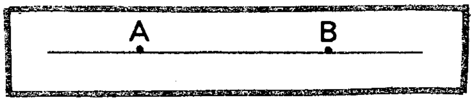


fig. 11

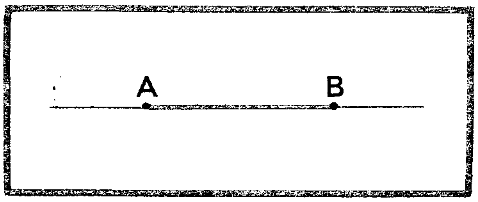


fig. 12

retta orientata. Si dice verso da A a B o semplicemente **verso AB** quello individuato da un punto che si muove sulla retta andando da A a B (fig. 11). Analogamente si definisce il **verso BA.**

7 DEFINIZIONE I *Preso sulla retta orientata r un punto O, si chiama* **semiretta** o **raggio** *l'insieme del punto O e dei punti che seguono oppure precedono O.*

La congiunzione *oppure* ha ovviamente significato disgiuntivo (latino aut).

Un punto O su una retta r determina quindi due semirette. Il punto O si chiama **origine** ed è comune alle due semirette. Si dice che queste due semirette **escono** dal punto O, o che esse sono **opposte**, o che una è il prolungamento dell'altra e che la retta è il loro **sostegno.**

I punti di una semiretta diversi dall'origine si dicono punti **interni.** Una semiretta che esce da un punto O e alla quale appartiene il punto interno A è designata con la scrittura OA.

8 DEFINIZIONE II *Si chiama* **segmento** *AB l'insieme dei punti A e B e di quelli che seguono A e precedono B nel verso da A a B* (fig. 12).

Va notato, in base alla definizione, che il segmento AB coincide con il segmento BA (insieme, cioè, dei punti B e A e di quelli che seguono B e precedono A nel verso BA) e pertanto, per designarlo, si adoperano indifferentemente le notazioni AB oppure BA, o, se ciò è più comodo e non genera confusioni, con una delle lettere minuscole a, b, c... dell'alfabeto italiano.

I punti del segmento diversi da A e B si dicono punti **interni**; A e B si dicono estremi. La retta AB che contiene il segmento si chiama **sostegno** del segmento.

Si dice che il segmento AB **congiunge** A con B e che esso è la **distanza** dei due punti A e B.

Si dice **segmento nullo** quello i cui estremi coincidono: esso, ovviamente, si identifica con un punto.

Il segmento che ha per estremi A e B si dice anche, per brevità, segmento compreso tra quei due punti.

Un segmento si dice **orientato** se su di esso è stato fissato un verso di percorrenza. Allora, se A è l'estremo di partenza (o primo estremo) e B l'estremo di arrivo (o secondo estremo), la scrittura AB indicherà tale orientazione; invece

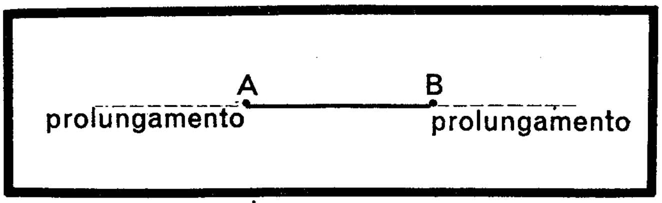


fig. 13

la scrittura BA indicherà il segmento orientato da B verso A e si dirà che BA è **opposto** del segmento AB.

Presi sulla retta r due punti distinti A e B, si consideri il segmento AB: la semiretta di origine A, che non contiene B, e la semiretta di origine B, che non contiene A, si dicono i **prolungamenti** del segmento AB, rispettivamente dalla parte di A e dalla parte di B (fig. 13).

Il segmento AB si può anche definire come intersezione della semiretta AB con la semiretta BA. In simboli:

$$\text{segm. } (AB) = [\text{semiretta } (AB) \cap \text{ semiretta } (BA)].$$

9 Si dice **convessa** una figura se contiene il segmento che congiunge due qualsiasi punti di essa; si dice **concava** in caso contrario (figg. 14 e 15).

TEOREMA L'intersezione di due figure convesse (che non costituisca un insieme vuoto) è una figura convessa.

Si chiamino F_1 e F_2 due figure convesse e I la loro intersezione (fig. 16). Se due punti A e B appartengono a I, essi appartengono, per ipotesi, anche a F_1 e a F_2: il segmento AB, che è contenuto dunque sia in F_1 che in F_2 perchè figure convesse, sarà contenuto anche nella loro intersezione I, che pertanto è una figura convessa.

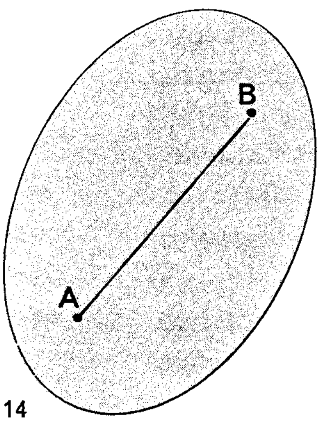


fig. 14

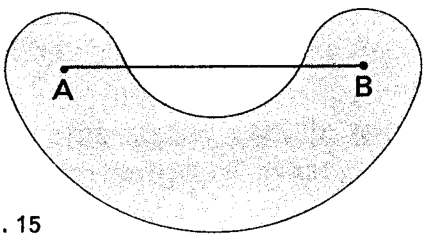


fig. 15

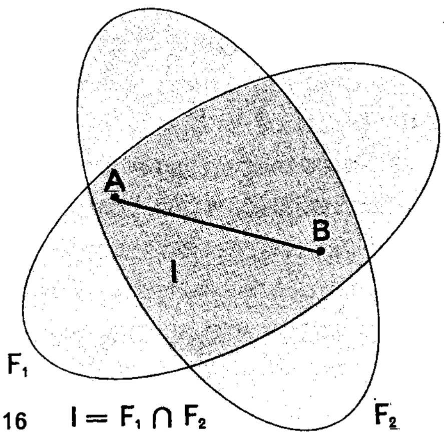


fig. 16 $I = F_1 \cap F_2$